



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

# Linhas de Curvatura em Superfícies Algébricas do Espaço Euclidiano de Dimensão Três

Verônica Santana Reis

Orientadora: Prof.<sup>a</sup> Dra. Débora Lopes da Silva

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de  
Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001

São Cristóvão, 2019.

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

# Linhas de Curvatura em Superfícies Algébricas do Espaço Euclidiano de Dimensão Três

*Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da UFS, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática.*

Verônica Santana Reis

Orientadora: Prof.<sup>a</sup> Dra. Débora Lopes da Silva

São Cristóvão, 2019.



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE  
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

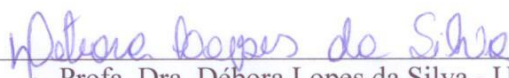
*Dissertação submetida à aprovação pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Sergipe, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Matemática.*

**Linhas de Curvatura em Superfícies Algébricas do Espaço  
Euclidiano de Dimensão Três**

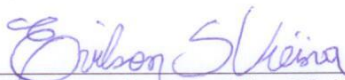
*por*

*Verônica Santana Reis*

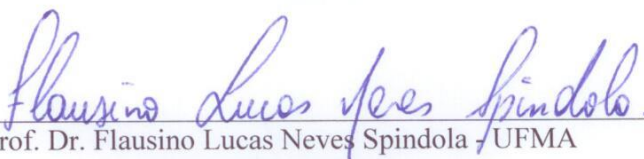
Aprovada pela banca examinadora:



Prof. Dra. Débora Lopes da Silva - UFS  
Orientador



Prof. Dr. Evilson da Silva Vieira - UFS  
Primeiro Examinador



Prof. Dr. Flausino Lucas Neves Spindola - UFMA  
Segundo Examinador

São Cristóvão, 21 de Fevereiro de 2019

**FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA CENTRAL  
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE**

Reis, Verônica Santana  
R375l Linhas de curvatura em superfícies algébricas do espaço  
euclidiano de dimensões três / Verônica Santana Reis ;  
orientadora Débora Lopes da Silva . – São Cristóvão, 2019.  
82 f. : il.

Dissertação (mestrado em Matemática) – Universidade Federal  
de Sergipe, 2019.

1. Matemática. 2. Superfícies (Matemática). 3. Curvas  
algébricas. 4. Curvatura. 4. Estabilidade. I. Reis, Verônica  
Santana orient. II. Título.

CDU 512.77

# Agradecimentos

Inicio meus agradecimentos por Deus, obrigada pela minha saúde e resiliência para superar as dificuldades e curtir os bons momentos desses dois anos. Também agradeço: a minha mãe, Deusamar, por todo carinho, compreensão e amor que me motiva a buscar ser minha melhor versão. A minha orientadora Débora Lopes, pelas conversas e paciência durante a realização deste trabalho. A todos os professores do Departamento de Matemática da UFS. Aos professores Flausino, Evilson e Ronaldo Garcia pelas sugestões e correções feitas a esse trabalho. A todos os alunos do Promat da UFS. As minhas amigas Cris, Naiara e Paloma pelas agradáveis conversas. Para finalizar, agradeço a Capes pelo apoio financeiro durante o mestrado.

# Resumo

O presente trabalho tem por objetivo estudar as linhas de curvatura em superfícies algébricas do espaço euclidiano de dimensão três, tomando com base o artigo “Lines of curvature on algebraic surfaces” dos autores Sotomayor e Garcia. Tratamos de definir, exemplificar e ilustrar uma técnica chamada de compactificação de superfície algébrica, usada ao longo do trabalho para estudar as linhas de curvatura no infinito. Concluimos com o teorema global de estabilidade estrutural de superfície algébrica, que generaliza as condições do teorema de Gutierrez e Sotomayor para superfícies compactas.

**Palavras-chave:** superfície algébrica, linha de curvatura, estabilidade.

# Abstract

The present work aims to study the curvature lines on algebraic surfaces of dimension three euclidean space, based on the article "Lines of curvature on algebraic surfaces" of the authors Sotomayor and Garcia. We try to define, exemplify and illustrate a technique called algebraic surface compactification, used throughout the work to study the lines of curvature at infinity. We conclude with the global theorem of structural stability of algebraic surface, which generalizes the conditions of Gutierrez and Sotomayor theorem for compact surfaces.

**Keywords:** algebraic surface, line of curvature, stability.

# Sumário

<b>1</b>	<b>Preliminares</b>	<b>11</b>
1.1	Superfícies . . . . .	11
1.1.1	Mudança de coordenadas . . . . .	12
1.1.2	Espaço Tangente . . . . .	13
1.1.3	Orientação de Superfícies . . . . .	14
1.2	Primeira forma fundamental . . . . .	14
1.3	Segunda forma fundamental . . . . .	15
1.4	Equação diferencial das linhas de curvatura . . . . .	19
1.5	Campo de Lie-Cartan e Pontos Umbílicos Darbouxianos . . . . .	21
1.6	Mapa de Poincaré . . . . .	26
<b>2</b>	<b>Compactificação de Curvas e Superfícies algébricas</b>	<b>28</b>
2.1	Superfície Algébrica . . . . .	28
2.2	Compactificação de Curva Algébrica . . . . .	31
2.3	Compactificação de Superfície Algébrica . . . . .	38
<b>3</b>	<b>Estabilidade de Superfície Algébrica</b>	<b>50</b>
3.1	Estabilidade próximo aos Pontos Finais regulares . . . . .	50
3.1.1	Singularidades do campo de Lie-Cartan . . . . .	54
3.2	Pontos Umbílicos e Finais Regulares . . . . .	66
3.3	Ciclos Limites no Infinito . . . . .	71
3.4	Teorema de Estabilidade Estrutural . . . . .	75
3.5	Considerações finais . . . . .	76
<b>4</b>	<b>Resultados</b>	<b>77</b>
4.1	Lema de Morse . . . . .	77
4.2	Resultante de Polinômios . . . . .	77
	<b>Referências</b>	<b>81</b>



# Lista de Figuras

1.1	Ilustração da construção da aplicação $\alpha_i, i = 1, 2$ . O ponto sinalizado na cor amarela é $\alpha_1(x, y)$ e na cor laranja é $\alpha_2(x, y)$ .	12
1.2	Ilustração de uma mudança de coordenadas da superfície $M^2$ .	13
1.3	Ilustração círculo unitário $S_q^1$ do espaço tangente a $M^2$ .	21
1.4	Comportamento das linhas de curvatura próxima aos pontos umbílicos Darbouxianos.	23
1.5	Superfície $M^2$ e suas linhas de curvatura.	24
1.6	Mapa de Poincaré	27
2.1	Linhas de curvatura principal de $A(\alpha)$ para $c_2 = \frac{\pi}{4}$ e $c_1 = \frac{4\sqrt{2}}{\pi}$ .	30
2.2	Construção geométrica das projeções centrais.	31
2.3	Ilustração da ação dos difeomorfismos na compactificação de uma curva algébrica	34
2.4	Do lado direito a curva algébrica formado somente por um único ponto. Do lado esquerdo, de preto, estão ilustrados as cópias de $A(\alpha) = \{(0, 0)\}$ em $\mathbb{S}^2$	34
2.5	Do lado esquerdo o círculo unitário. Do lado direito, de preto estão ilustrados as cópias deste círculo.	35
2.6	Do lado esquerdo a reta e no lado direito sua compactificação.	35
2.7	Do lado esquerdo a curva algébrica $A(\delta)$ e do lado direito a figura ilustra como é a interseção da esfera com $A(\delta^c)$ .	36
2.8	Ilustração dos domínios dos difeomorfismos usados na compactificação de uma superfície algébrica	38
2.9	Projeção do conjunto $W_2$ na esfera unitária $\mathbb{S}^2$ .	40
2.10	Projeção do conjunto $W_2$ na esfera unitária $\mathbb{S}^2$ .	41
2.11	Projeção do conjunto $A^c(\delta) \cap \{w = 0\}$ na esfera unitária $\mathbb{S}^2$ .	41
2.12	Esquema de compactificação das linhas de curvatura do parabolóide. As curvas de mesmas cores no parabolóide, plano e na esfera são as mesmas a menos dos difeomorfismos $\pi, \Pi^+$ e $\Pi^-$ .	47

2.13	Esquema de compactificação das linhas de curvatura. As curvas de mesmas cores no plano e na esfera são as mesmas a menos dos difeomorfismos $\pi$ , $\Pi^+$ e $\Pi^-$ .	48
3.1	Ilustração indica os domínios dos difeomorfismos	51
3.2	Ilustração de $H^{-1}(0)$ nos pontos bitransversais	57
3.3	Comportamento das redes principais dos itens i) e iii)	57
3.4	Comportamento das redes principais do item ii)	59

# Introdução

A teoria da estabilidade estrutural inicialmente foi estudada para um sistema dinâmico, em 1937, e os pioneiros nesse estudo foram os matemáticos russos Andronov (1901-1952) e Pontrjagin (1908-1988). De modo geral, eles queriam analisar o comportamento de um sistema dinâmico após pequenas mudanças na equação diferencial associada ao sistema. Se após essas mudanças a nova equação diferencial permanecesse com as características qualitativas da não modificada o sistema seria estruturalmente estável. Essa foi a ideia do conceito da estabilidade estrutural de sistemas dinâmicos também estudado por outros pesquisadores.

Vamos destacar aqui os matemáticos Marília Peixoto (1921-1961) e Maurício Peixoto (1921) que estudaram a estabilidade para sistemas bidimensionais do plano e foi uma das influências para o trabalho que tomaremos como base nessa dissertação. Em [18],[19] foi provado um teorema com condições necessárias e suficientes (sobre as singularidades, órbitas periódicas e separatrizes) para que sistemas dinâmicos, em regiões compactas e com bordo suave no plano, fossem estruturalmente estáveis. Com essas condições Sotomayor e Gutierrez, estudaram a estabilidade para superfícies regulares compactas de  $\mathbb{R}^3$ . Eles caracterizaram as superfícies estruturalmente estáveis, por seus pontos umbílicos, ciclos limites e as separatrizes umbílicas, em um teorema de estabilidade provado no artigo [10].

Anos após a publicação desse artigo, Sotomayor e Garcia, em [1], estudaram o comportamento das linhas de curvatura de uma superfície algébrica na vizinhança de pontos regulares finais e ciclos do infinito e também observaram a estabilidade nessas vizinhanças. Eles provaram em [1] o teorema global de estabilidade para superfícies algébricas não compactas, de modo que quando a superfície é compacta esse resultado coincide com o teorema que está no artigo [10]. A continuação do trabalho [1] foi feita em [2] que trouxe de novidade o estudo do comportamento das linhas de curvatura na vizinhança de pontos singulares finais.

Considerando esses antecedentes do estudo da estabilidade, a nossa proposta é basear-se no artigo [1] para estudar as linhas de curvatura de superfícies algébricas não compactas de  $\mathbb{R}^3$ , e a estabilidade desse tipo de superfícies. A dissertação está dividida em três capítulos.

No capítulo 1, trazemos os conceitos de superfícies do  $\mathbb{R}^3$ . No capítulo 2, trazemos as notações e a técnica da compactificação de curvas e superfícies algébricas. A curva

compactificada é um subconjunto da esfera unitária de  $\mathbb{R}^3$ , composto pela imagem das projeções centrais da curva algébrica unido com o conjunto algébrico final. Já a compactificação para superfícies algébricas do  $\mathbb{R}^3$ , é o subconjunto de  $\mathbb{S}^3 \subset \mathbb{R}^4$  formado pela união das imagens das projeções da superfície algébrica com o conjunto algébrico final.

O capítulo 2 é a base para o entendimento do 3, onde analisaremos o comportamento das linhas de curvatura no infinito de uma superfície  $A(\alpha)$ . As linhas do infinito são as extensões das linhas de curvatura de  $A(\alpha)$  que não são do infinito, e nós as obteremos de uma carta local  $\xi(s, r) = r\gamma(s, r)$  de  $A(\alpha)$  a ser construída no início do segundo capítulo. Com a construção da  $\xi$ , estudar as linhas de curvatura na vizinhança do infinito significa analisar qualitativamente a equação diferencial das linhas de curvatura. Usaremos o campo de Lie-Cartan associado a essa equação, para fazer essa análise que consta na proposição 3.3.

Em [2] foi feita a análise qualitativa da equação diferencial das linhas de curvatura para os pontos singulares finais de uma superfície implícita em  $\mathbb{R}^3$ . Com esse estudo conclui-se a análise do comportamento das linhas de curvatura numa vizinhança dos pontos regulares e singulares finais.

No artigo [8] publicado em 2018, encontramos uma forma de compactificar as linhas de curvatura das superfícies algébricas que são vistas como gráfico de uma função polinomial  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ . Citamos este trabalho porque nesta dissertação aproveitaremos para acrescentar, no exemplo 2.11, a forma utilizada em [8] para compactificar as linhas de curvatura.

Para finalizar o capítulo 3, enunciaremos o teorema global de estabilidade das superfícies algébricas que foram trabalhadas em [1]. Desse resultado, teremos que o conjunto das superfícies algébricas estruturalmente estáveis é caracterizado pelas que: são regulares (finito e infinito), todos os seus pontos umbílicos são Darbouxianos, os ciclos principais são hiperbólicos, os que estão no infinito são semi-hiperbólicos, os pontos de inflexões são bitransversais e o conjunto limite das linhas de curvatura é um ponto ou um ciclo limite.

# Capítulo 1

## Preliminares

Neste capítulo faremos um resumo das principais definições da Geometria Diferencial de curvas e superfícies em  $\mathbb{R}^3$ , onde tomaremos como base o livro do 27º colóquio brasileiro de Matemática [6] dos autores Sotomayor e Garcia. Obteremos a equação diferencial das linhas de curvatura principais, que são as curvas ao longo das quais a superfície se dobra extremamente. Pode-se dizer que a teoria das linhas de curvatura foi fundada por Gaspar Monge (1796), que determinou explicitamente todas as linhas de curvatura do elipsoide com três eixos distintos.

### 1.1 Superfícies

**Definição 1.1.** Uma aplicação diferenciável  $\alpha : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$  chama-se uma imersão quando, para cada  $x \in U$ , a derivada  $D\alpha(x) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$  é uma transformação linear injetiva.

**Definição 1.2.** Uma superfície  $m$  dimensional de  $\mathbb{R}^n$  de classe  $C^k$  é um subconjunto  $M^m \subset \mathbb{R}^n$ , onde para cada ponto  $p \in M$  existe uma vizinhança aberta  $V$  de  $p$  em  $\mathbb{R}^n$ , um aberto  $U$  de  $\mathbb{R}^m$  e uma aplicação  $\alpha : U \rightarrow V \cap M^m$  de classe  $C^k$  tal que

1.  $\alpha$  é um homeomorfismo de  $U$  sobre  $V \cap M^m$
2.  $\alpha$  é uma imersão

**Observação 1.1.** Nas condições da definição 1.2, a aplicação  $\alpha$  é chamada de carta local  $C^k$  de  $M^m$  em  $p$ .

**Exemplo 1.1.** Qualquer aberto  $U \subset \mathbb{R}^n$  é uma superfície  $n$ -dimensional. De fato, considere a aplicação  $i : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  definida por  $i(u) = u$ . Ela é um homeomorfismo de classe  $C^\infty$  e sua derivada é a matriz identidade de  $\mathbb{R}^n$  de posto  $n$ .

**Exemplo 1.2.** A esfera unitária  $\mathbb{S}^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$  é uma superfície 2-dimensional em  $\mathbb{R}^3$ . De fato, considere as imersões  $\alpha_1 : \mathbb{S}^2 \setminus \{(0, 0, 1)\} \rightarrow \mathbb{R}^3$  e

$$\alpha_2 : \mathbb{S}^2 \setminus \{(0, 0, -1)\} \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\begin{aligned}\alpha_1(x, y) &= \left( \frac{2x}{1+x^2+y^2}, \frac{2y}{1+x^2+y^2}, \frac{-1+x^2+y^2}{1+x^2+y^2} \right), \\ \alpha_2(x, y) &= \left( \frac{2x}{1+x^2+y^2}, \frac{2y}{1+x^2+y^2}, \frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2} \right),\end{aligned}\tag{1.1}$$

que também são difeomorfismos, pois tem inversas

$$\begin{aligned}\alpha_1^{-1}(x, y, z) &= \left( \frac{-x}{z-1}, \frac{-y}{z-1} \right), \\ \alpha_2^{-1}(x, y, z) &= \left( \frac{x}{z+1}, \frac{y}{z+1} \right).\end{aligned}\tag{1.2}$$

Essas  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  são chamadas de projeções estereográficas. O ponto  $\alpha_1(x, y)$  é o ponto de interseção (figura 1.2) da reta, definida pelos pontos  $(0, 0, 1)$  e  $(x, y, 0)$ , com a esfera unitária. De modo análogo  $\alpha_2(x, y)$  é o ponto de interseção (figura 1.2) da reta, definida pelos pontos  $(0, 0, -1)$  e  $(x, y, 0)$ , com a esfera unitária.

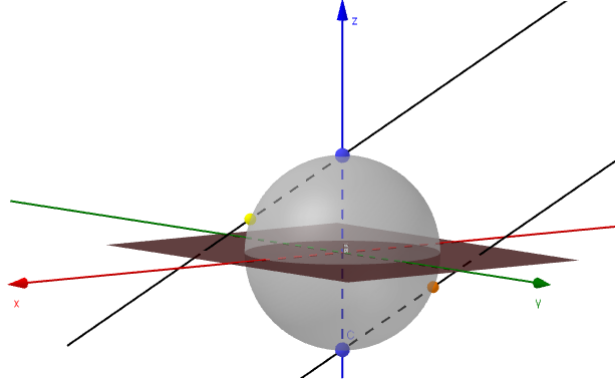


Figura 1.1: Ilustração da construção da aplicação  $\alpha_i, i = 1, 2$ . O ponto sinalizado na cor amarela é  $\alpha_1(x, y)$  e na cor laranja é  $\alpha_2(x, y)$ .

### 1.1.1 Mudança de coordenadas

Seja  $M^m$  uma superfície  $m$ -dimensional e  $\alpha : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow V \cap M^m$  uma carta local  $C^k$ . Se  $W$  é um aberto de  $\mathbb{R}^m$  e  $h : W \rightarrow U$  é um difeomorfismo de classe  $C^k$ , então  $\alpha \circ h : W \rightarrow V \cap M^m$  é ainda uma carta de  $V \cap M^m$ . Essa aplicação  $h$  é chamada de *mudança de coordenadas*.

Seja  $M^m$  uma superfície  $m$  dimensional de classe  $C^k$  em  $\mathbb{R}^n$ . Se  $\alpha : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  e  $\varphi : V \rightarrow \mathbb{R}^n$  são cartas locais de  $M^m$  de modo que  $\alpha(U) \cap \varphi(V) \neq \emptyset$ , então  $h = \varphi^{-1} \circ \alpha$  é um difeomorfismo de classe  $C^k$  de  $U_0 = \alpha^{-1}(\alpha(U) \cap \varphi(V))$  em  $V_0 = \varphi^{-1}(\alpha(U) \cap \varphi(V))$ . O caso da mudança de coordenada de uma superfície 2-dimensional de  $\mathbb{R}^3$  é ilustrado na figura 1.1.1.

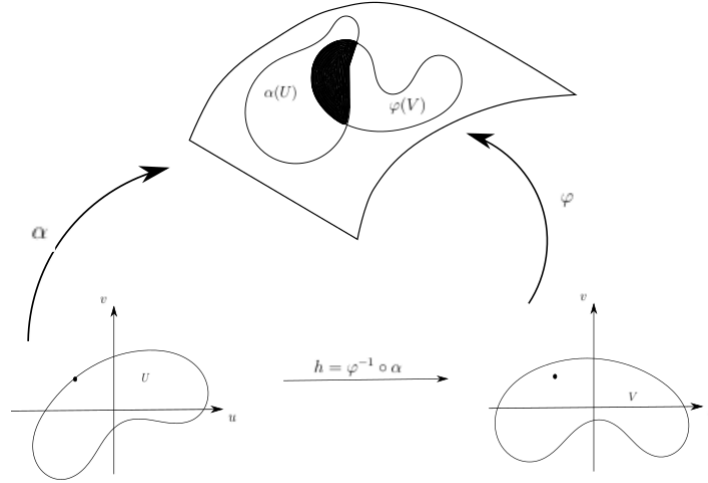


Figura 1.2: Ilustração de uma mudança de coordenadas da superfície  $M^2$ .

### 1.1.2 Espaço Tangente

Seja  $M^m$  uma superfície  $m$ -dimensional e  $\alpha : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  uma carta local  $C^k$  de  $M^m$  de  $M^m$  tal que para  $u \in U$  e  $p \in M^m$ ,  $\alpha(u) = p$ . Note que a imagem de  $D\alpha(u) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  é um subespaço de dimensão  $m$ . Este subespaço é chamado de espaço tangente a  $M^m$  no ponto  $p$ . Denotamos este espaço de  $T_p M^m = D\alpha(u)(\mathbb{R}^m)$ .

#### Observação 1.2.

- a) Os elementos de  $T_p M^m$  são chamados de vetores tangentes.
- b) Seja  $\alpha(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$  carta de  $M^2 \subset \mathbb{R}^3$  então

$$D\alpha(u, v) = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{bmatrix},$$

e o espaço tangente é identificado pelo conjunto

$$T_p M^2 = \left\{ (a, b) \in \mathbb{R}^2; D\alpha(u, v)(a, b) = a \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} \\ \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial z}{\partial u} \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial v} \end{bmatrix} = a\alpha_u + b\alpha_v \right\}.$$

### 1.1.3 Orientação de Superfícies

**Definição 1.3.** Uma superfície  $m$ -dimensional  $M^m$  é orientável se for possível cobri-la com uma família de cartas coordenadas, de tal modo que se um ponto  $p \in M^m$  pertence a duas vizinhanças dessa família, então a mudança de coordenadas tem jacobiano positivo em  $p$ . A escolha de uma tal família é chamada uma *orientação de  $M^m$* . Neste caso  $M^m$  é chamada de superfície orientada.

Se uma tal escolha não é possível, a superfície é não-orientável. Se  $M^m$  é orientada, uma carta  $\alpha$  é *compatível* com a orientação de  $M^m$  se, juntando  $\alpha$  a família de cartas dada pela orientação, obtém-se ainda uma orientação de  $M^m$ .

**Definição 1.4.** Seja  $\alpha : U \rightarrow V \cap M^m$  carta local em um aberto  $U \subset \mathbb{R}^2$ . Um campo diferenciável de vetores normais é uma aplicação diferenciável  $N : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  que associa a cada  $q \in U$  um vetor normal unitário  $N(q) \in M^m$ .

**Exemplo 1.3.** Seja  $\alpha : U \rightarrow V \cap M^2$  uma carta local  $C^k$  de  $M^2$ . Em cada ponto  $q = \alpha(U)$  o vetor normal unitário é

$$N(q) = \frac{\alpha_u \wedge \alpha_v}{|\alpha_u \wedge \alpha_v|}(q).$$

**Exemplo 1.4.** Seja  $M^2 = \{(x, y, z); x^2 + y^2 = z\}$  uma superfície 2-dimensional de  $\mathbb{R}^3$ . Seja  $\alpha : (0, 2\pi) \times \mathbb{R} \rightarrow M^2$  definida por  $\alpha(u, v) = (v \cos(u), v \sin(u), v^2)$  uma carta local  $C^k$  de  $M^2$  então as derivadas parciais de  $\alpha$  em relação a  $u$  e  $v$  são

$$\begin{aligned}\alpha_u &= (-v \sin(u), v \cos(u), 0), \\ \alpha_v &= (\cos(u), \sin(u), 2v).\end{aligned}$$

Assim, o produto vetorial desses vetores é  $\alpha_u \wedge \alpha_v = (2v^2 \cos(u), 2v^2 \sin(u), -v)$ . Portanto o normal é

$$N(u, v) = \left( \frac{2v^2 \cos(u)}{\sqrt{4v^4 + v^2}}, \frac{2v^2 \sin(u)}{\sqrt{4v^4 + v^2}}, \frac{-v}{\sqrt{4v^4 + v^2}} \right).$$

## 1.2 Primeira forma fundamental

**Definição 1.5.** Seja  $\alpha : U \rightarrow V \cap M^2$  uma imersão da superfície 2-dimensional  $M^2$ ,  $\forall q \in U$ , a aplicação

$$\begin{aligned}I_q : T_q M^2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ w &\rightarrow I_q(w) = \langle w, w \rangle\end{aligned}$$

é a primeira forma quadrática de  $\alpha$  em  $q$ .

Dada a imersão  $\alpha : U \rightarrow V \cap M^2$  de classe  $C^r$ ,  $r \geq 3$  da superfície 2-dimensional  $M^2$  de  $\mathbb{R}^3$ , estabelecemos que o espaço  $\mathbb{R}^3$  está orientado pelo produto interno euclidiano



$$\langle (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3.$$

A métrica induzida em  $T_q M^2$  é definida por

$$\langle u, v \rangle_q = \langle D\alpha(q)(u), D\alpha(q)(v) \rangle, \text{ onde } u, v \in T_q M^2$$

ou seja, calcular o produto interno de  $u$  por  $v$  é calcular o produto interno dos vetores  $D\alpha(q)(u)$  e  $D\alpha(q)(v)$  de  $\mathbb{R}^3$  na métrica euclidiana. O vetor  $D\alpha(q)(u)$  denota a derivada da aplicação  $\alpha$  no ponto  $q$  aplicada ao vetor  $u$ .

Nessa carta  $\alpha$  considere uma curva parametrizada  $c(t) = (u(t), v(t))$ . Então segue que  $x(t) = (\alpha \circ c)(t)$  é uma curva e  $x'(t) = \alpha_u u'(t) + \alpha_v v'(t)$  é um vetor tangente de  $T_q M^2$ , onde  $q = c(0)$ . Portanto,

$$\langle x', x' \rangle = \langle \alpha_u, \alpha_u \rangle (u')^2 + 2\langle \alpha_u, \alpha_v \rangle u'v' + \langle \alpha_v, \alpha_v \rangle (v')^2,$$

e uma expressão para a primeira forma fundamental de  $\alpha$  em  $q$  é

$$I_q(x') = \langle x', x' \rangle = \langle \alpha_u, \alpha_u \rangle (u')^2 + \langle \alpha_u, \alpha_v \rangle u'v' + \langle \alpha_v, \alpha_v \rangle (v')^2,$$

onde  $E = \langle \alpha_u, \alpha_u \rangle$ ,  $F = \langle \alpha_u, \alpha_v \rangle$ , e  $G = \langle \alpha_v, \alpha_v \rangle$ .

**Observação 1.3.** Essa forma quadrática é positiva-definida, isto é  $E > 0$ ,  $G > 0$  e  $EG - F^2 > 0$ .

Em notação de formas diferenciais (para melhor entendimento de formas diferenciais, consulte [3]) a expressão para a primeira forma fundamental é

$$ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2.$$

### 1.3 Segunda forma fundamental

Seja  $\alpha : U \rightarrow V \cap M^2$  uma carta local  $C^k$  de uma superfície 2-dimensional  $M^2$  orientada. Seja  $N$  o campo de vetores normais a  $\alpha$  que define a orientação de  $M^2$ .

Como a superfície é orientada, o conjunto  $\{\alpha_u, \alpha_v, N\}$  é uma base positiva de  $\mathbb{R}^3$ . Seja  $x(s) = \alpha(u(s), v(s))$  uma curva de  $M^2$  tal que  $|x'(s)| = 1$ . O vetor curvatura  $k(s) = \frac{dT}{ds}$  onde  $T(s) = \frac{dx}{ds}$  tem uma decomposição ortogonal  $k = k_n N + k_g N \wedge T$  tal que  $k_n$  é chamada de *curvatura normal* e  $k_g$  de *curvatura geodésica*. Dessa decomposição,

$$k_n(s) = \left\langle \frac{dT}{ds}, N \right\rangle.$$

Como,  $\langle T, N \rangle = 0$  segue que  $\left\langle \frac{dT}{ds}, N \right\rangle + \left\langle T, \frac{dN}{ds} \right\rangle = 0$  e portanto

$$k_n(s) = - \left\langle T, \frac{dN}{ds} \right\rangle = - \left\langle \frac{dx}{ds}, \frac{dN}{ds} \right\rangle. \quad (1.3)$$

Derivando a relação  $x(s) = \alpha(u(s), v(s))$  em relação a  $s$  segue que

$$\frac{dx}{ds} = x' = \alpha_u u' + \alpha_v v'. \quad (1.4)$$

Além disso, note que o normal a curva é  $N(u(s), v(s))$ . Derivando esse vetor em relação a  $s$  segue que

$$\frac{dN}{ds} = N_u u' + N_v v'. \quad (1.5)$$

Usando as propriedades de produto interno e as expressões (1.4) e (1.5) em (1.3) segue que

$$\begin{aligned} k_n(s) &= - \langle \alpha_u u' + \alpha_v v', N_u u' + N_v v' \rangle \\ &= - \langle \alpha_u, N_u \rangle (u')^2 - (\langle \alpha_u, N_v \rangle + \langle \alpha_v, N_u \rangle) u' v' - \langle \alpha_v, N_v \rangle (v')^2, \end{aligned} \quad (1.6)$$

onde,  $e = -\langle \alpha_u, N_u \rangle$ ,  $2f = -(\langle \alpha_u, N_v \rangle + \langle \alpha_v, N_u \rangle)$  e  $g = -\langle \alpha_v, N_v \rangle$ . Pela definição do normal a superfície na carta local  $\alpha$  temos que  $\langle \alpha_u, N \rangle = \langle \alpha_v, N \rangle = 0$ . Derivando essas relações segue que

$$\begin{aligned} \langle \alpha_{uu}, N \rangle + \langle \alpha_u, N_u \rangle &= 0, \\ \langle \alpha_{vv}, N \rangle + \langle \alpha_v, N_v \rangle &= 0, \\ \langle \alpha_{uv}, N \rangle + \langle \alpha_u, N_v \rangle &= 0. \end{aligned}$$

Então

$$\begin{aligned} e &= -\langle \alpha_u, N_u \rangle = \langle \alpha_{uu}, N \rangle, \\ f &= \frac{\langle \alpha_u, N_v \rangle + \langle \alpha_v, N_u \rangle}{2} = \langle \alpha_{uv}, N \rangle, \\ g &= -\langle \alpha_v, N_v \rangle = \langle \alpha_{vv}, N \rangle. \end{aligned}$$

Usando a expressão  $N = \frac{\alpha_u \wedge \alpha_v}{|\alpha_u \wedge \alpha_v|}$ , a notação  $[u_1, u_2, u_3]$  (para produto misto dos vetores  $u_1, u_2$  e  $u_3$ ) e a propriedade:

$$\langle u_1, u_2 \wedge u_3 \rangle = [u_1, u_2, u_3],$$

obteremos  $e, f, g$  em termos do produto misto de três vetores em  $\mathbb{R}^3$ :

$$e = \frac{[\alpha_u, \alpha_v, \alpha_{uu}]}{|\alpha_u \wedge \alpha_v|}, \quad f = \frac{[\alpha_u, \alpha_v, \alpha_{uv}]}{|\alpha_u \wedge \alpha_v|}, \quad g = \frac{[\alpha_u, \alpha_v, \alpha_{vv}]}{|\alpha_u \wedge \alpha_v|}.$$

Como supomos acima o vetor tangente a curva tem norma 1, isto é,  $|x'| = 1$  e pela seção anterior  $I_\alpha(x') = |x'|^2 = 1$ , assim podemos reescrever  $k_n(s)$  da seguinte forma

$$\begin{aligned} k_n(s) &= -\langle \alpha_u, N_u \rangle (u')^2 - 2(\langle \alpha_u, N_v \rangle + \langle \alpha_v, N_u \rangle) u'v' - \langle \alpha_v, N_v \rangle (v')^2 \\ &= \frac{e(u')^2 - 2fu'v' - g(v')^2}{I_q(x')}. \end{aligned} \quad (1.7)$$

A seguir trazemos a definição e uma interpretação para a expressão do numerador da curvatura normal.

**Definição 1.6.** Seja  $\alpha : U \rightarrow V \cap M^2$  uma carta local da superfície 2-dimensional orientada  $M^2$ . Considere a curva  $x(t) = \alpha(u(t), v(t))$  tal que  $x(t_0) = \alpha(u(t_0), v(t_0))$ ,  $(u(t_0), v(t_0)) = q$  e  $w = x'(t_0)$ . A segunda forma fundamental na carta  $\alpha$  é a aplicação

$$\begin{aligned} II_q : T_q M^2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ w &\rightarrow II_q(w) = \langle x''(t_0), N(u(t_0), v(t_0)) \rangle \end{aligned} \quad (1.8)$$

**Exemplo 1.5.** Considere o parabolóide  $x^2 + y^2 = z$ . Pelo exemplo 1.3 a carta  $\alpha(u, v) = (v \cos(u), v \sin(u), v^2)$  cobre todo o parabolóide. Além disso, essa superfície é orientada pelo vetor normal

$$N(u, v) = \left( \frac{2v^2 \cos(u)}{\sqrt{4v^4 + v^2}}, \frac{2v^2 \sin(u)}{\sqrt{4v^4 + v^2}}, \frac{-v}{\sqrt{4v^4 + v^2}} \right).$$

Considerando a curva  $x(t) = \alpha(0, t) = (t, 0, t^2)$  um círculo do parabolóide, segue que o normal no ponto  $(u(t_0), v(t_0)) = (0, t_0)$  é

$$\begin{aligned} N(0, t_0) &= \left( \frac{2v(t_0)^2 \cos(u(t_0))}{\sqrt{4v(t_0)^4 + v(t_0)^2}}, \frac{2v(t_0)^2 \sin(u(t_0))}{\sqrt{4v(t_0)^4 + v(t_0)^2}}, \frac{-v(t_0)}{\sqrt{4v(t_0)^4 + v(t_0)^2}} \right) \\ &= \left( \frac{2t_0^2}{\sqrt{4t_0^4 + t_0^2}}, 0, \frac{-t_0}{\sqrt{4t_0^4 + t_0^2}} \right). \end{aligned}$$

Como  $x(t) = \alpha(0, t) = (t, 0, t^2)$  segue que

$$\begin{aligned} x'(t_0) &= (1, 0, 2t_0), \\ x''(t_0) &= (0, 0, 2). \end{aligned}$$

Então, pela definição 1.6 a segunda forma fundamental da superfície é:

$$II_q(w) = \langle x''(t_0), N(u(t_0), v(t_0)) \rangle = \frac{-2t_0}{\sqrt{4t_0^4 + t_0^2}},$$

onde  $w = x'(t_0)$ .

No exemplo anterior foi escolhido uma curva sem critérios. A próxima observação demonstra que a definição da segunda forma fundamental independe da curva escolhida.

**Observação 1.4.** A definição da segunda forma fundamental independe da escolha da curva escolhida.

*Solução:* Vamos mostrar que a expressão da segunda forma fundamental só depende da carta  $\alpha$  e das coordenadas do ponto  $(u(t_0), v(t_0))$  em que é calculada a segunda forma fundamental e do vetor tangente  $(u'(t_0), v'(t_0))$ . Considere  $x(t) = \alpha(u(t), v(t))$  curva de  $\alpha$  passando pelo ponto  $q = \alpha(u(t_0), v(t_0))$ . As derivadas de  $x$  em relação a  $t$  são:

$$\begin{aligned} x'(t) &= \alpha_u(u(t), v(t))u'(t) + \alpha_v(u(t), v(t))v'(t), \\ x''(t) &= \alpha_{uu}(u(t), v(t))(u'(t))^2 + \alpha_{uv}(u(t), v(t))u'(t)v'(t) + \\ &+ \alpha_{vu}(u(t), v(t))u'(t)v'(t) + \alpha_{vv}(u(t), v(t))(v'(t))^2. \end{aligned} \quad (1.9)$$

Daí, já obtemos que  $x''(t_0)$  só depende do vetor tangente, do ponto e de  $\alpha$ . Pela expressão do normal da seção 1.1.3 já temos que ele depende somente de  $\alpha$  e do ponto. Portanto a segunda forma independe da curva escolhida. ■

**Observação 1.5.** A segunda forma fundamental é dada, pela expressão

$$II_q(w) = e(u')^2 + 2fu'v' + g(v')^2,$$

onde os coeficientes  $e, f, g$  já foram definidos anteriormente.

*Solução:* Da observação 1.4 segue que a derivada segunda da curva  $x(t) = \alpha(u(t), v(t))$ , omitindo o parâmetro  $t$ , é

$$x'' = \alpha_{uu}(u')^2 + \alpha_{uv}u'v' + \alpha_{vu}u'v' + \alpha_{vv}(v')^2.$$

Então usando as propriedades de produto interno, segue que

$$II_q(w) = \langle x'', N \rangle = e(u')^2 + 2fu'v' + g(v')^2. \quad \blacksquare$$

**Observação 1.6.** Em notação de formas diferenciais [3], a segunda forma é definida pela expressão

$$II_q(w) = edu^2 + 2fdudv + gdv^2.$$

**Definição 1.7.** Seja  $\alpha : U \rightarrow V \cap M^2$  uma carta local de  $M^2$  e  $q = (u_0, v_0)$ . A função curvatura normal em  $q$  é a aplicação

$$\begin{aligned} k_n : T_p M^2 - \{(0, 0, 0)\} &\rightarrow \mathbb{R} \\ w &\rightarrow k_n(w) = \frac{II_q(w)}{I_q(w)} \end{aligned}$$

**Observação 1.7.** Em notação de formas diferenciais, a curvatura normal é dada por

$$k_n = \frac{edu^2 + 2fdudv + gdv^2}{Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2}.$$

## 1.4 Equação diferencial das linhas de curvatura

Considere a função curvatura normal

$$k_n(s) = \frac{e(u')^2 + 2fu'v' + g(v')^2}{E(u')^2 + 2Fu'v' + G(v')^2}. \quad (1.10)$$

Na notação da seção 1.1.2, o espaço tangente a  $M^2$  em um ponto  $q \in M^2$  é identificado pelo conjunto

$$T_q M^2 = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2; D\alpha(u, v)(a, b) = a\alpha_u + b\alpha_v\}.$$

Considerando a curva  $x(t) = \alpha(u(t), v(t))$  com  $q = x(t_0)$  denote  $a = u'$  e  $b = v'$  elementos de  $T_q M^2$ . Então

$$k_n(a, b) = \frac{ea^2 + 2fab + gb^2}{Ea^2 + 2Fab + Gb^2}. \quad (1.11)$$

Os pontos críticos da função  $k_n : T_q M^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}$  são os pontos em que as derivadas parciais de  $k_n$  em relação as variáveis  $a$  e  $b$  se anulam. Esses pontos críticos recebem nomes especiais.

**Definição 1.8.** Os pontos críticos são chamados de *direções principais* e as curvaturas correspondentes são as *curvaturas principais*. A curvatura normal nessas direções principais são denotadas por  $k_1$  (curvatura mínima) e  $k_2$  (curvatura máxima). Os pontos onde as curvaturas principais coincidem,  $k_1 = k_2$ , são chamados de *pontos umbílicos*.

Para encontrar as direções principais calculamos as derivadas parciais de (1.11) obtendo

$$\begin{aligned}\frac{\partial k_n}{\partial a} &= \frac{(Ea^2 + 2Fab + Gb^2)(2Ea + 2Fb) - (ea^2 + 2fab + gb^2)(2ea + 2fb)}{(Ea^2 + 2Fab + Gb^2)^2} = \\ &= \frac{2a^2b(Fe - Ef) + 2ab^2(Ge - Eg) + 2b^3(Gf - Fg)}{(Ea^2 + 2Fab + Gb^2)^2},\end{aligned}\quad (1.12)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial k_n}{\partial b} &= \frac{(Ea^2 + 2Fab + Gb^2)(2fa + 2gb) - (ea^2 + 2fab + gb^2)(2Fa + 2Gb)}{(Ea^2 + 2Fab + Gb^2)^2} = \\ &= \frac{2a^3(Ef - Fe) + 2a^2b(Eg - Ge) + 2ab^2(Fg - Gf)}{(Ea^2 + 2Fab + Gb^2)^2}.\end{aligned}\quad (1.13)$$

Assim, os pontos  $(a, b)$  de  $T_q M^2$  que anulam as derivadas (1.12) e (1.13) satisfazem as equações

$$a^2b(Fe - Ef) + ab^2(Ge - Eg) + b^3(Gf - Fg) = 0, \quad (1.14)$$

$$a^3(Ef - Fe) + a^2b(Eg - Ge) + ab^2(Fg - Gf) = 0. \quad (1.15)$$

Multiplicando (1.14) por  $-a$  e (1.15) por  $b$  seguem, respectivamente, (1.16) e (1.17):

$$a^3b(Ef - Fe) + a^2b^2(Eg - Ge) + ab^3(Fg - Gf) = 0, \quad (1.16)$$

$$a^3b(Ef - Fe) + a^2b^2(Eg - Ge) + ab^3(Fg - Gf) = 0. \quad (1.17)$$

Somando as equações (1.16) com (1.17), obtemos

$$2a^3b(Ef - Fe) + 2a^2b^2(Eg - Ge) + 2ab^3(Fg - Gf) = 0, \quad (1.18)$$

ou equivalentemente,

$$a^2(Ef - Fe) + ab(Eg - Ge) + b^2(Fg - Gf) = 0. \quad (1.19)$$

Na notação anterior  $a = u'$  e  $b = v'$  segue a equação:

$$(u')^2(Ef - Fe) + u'v'(Eg - Ge) + (v')^2(Fg - Gf) = 0. \quad (1.20)$$

Ela é chamada de *equação diferencial das linhas de curvatura*.

**Observação 1.8.** Na notação de formas diferenciais a equação diferencial das linhas de

curvatura é

$$du^2(Ef - Fe) + dudv(Eg - Ge) + dv^2(Fg - Gf) = 0. \quad (1.21)$$

## 1.5 Campo de Lie-Cartan e Pontos Umbílicos Darbouxianos

Nesta seção trataremos da Superfície de Lie-Cartan, que é uma superfície definida no Espaço Projetivo em cada ponto da Superfície  $M^2$ , conforme definimos a seguir: a cada ponto  $q$  de  $M^2$  está associado um círculo unitário  $S_q^1$ , centrado em  $q$ , contido no espaço tangente  $T_q M^2$ .

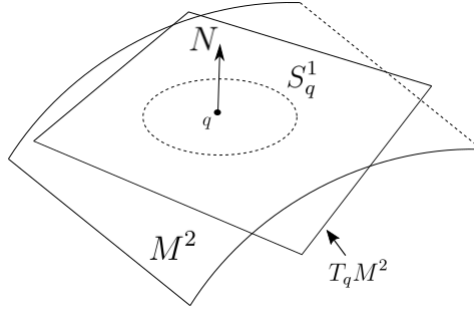


Figura 1.3: Ilustração círculo unitário  $S_q^1$  do espaço tangente a  $M^2$ .

Denotemos por  $P_q M^2$  o espaço projetivo associado a  $T_q M^2$ , ou seja,  $S_q^1$  quocientado pela seguinte relação de equivalência:  $u \in S_q^1$  está relacionado com  $v \in S_q^1$  se e somente se  $u = v$  ou  $u = -v$ . Denote esse espaço por  $P_q M^2$ . Seja  $[v]$  o representante da classe de equivalência e defina o conjunto

$$PM^2 = \{(q, [v]); q \in M^2, [v] \in P_q M^2\}.$$

O fibrado projetivo é  $(PM^2, M^2, \pi)$ , sendo  $\pi$  a projeção  $\pi : PM^2 \rightarrow M^2$  com  $\pi(q, [v]) = q$  tem estrutura de variedade diferenciável (ver [16]): para cada aberto  $V \subset M^2$  estão definidas duas cartas  $\left(u, v, \frac{du}{dv}\right)$  e  $\left(u, v, \frac{dv}{du}\right)$  as quais cobrem  $\pi^{-1}(V)$ .

**Definição 1.9.** Para cada carta local  $\alpha : U \rightarrow V \cap M^2$  de  $M^2$  define-se a Superfície de Lie-Cartan pelo conjunto  $\mathcal{H}_\alpha = H^{-1}(0)$ , onde

$$\begin{aligned} H(u, v, du, dv) &= L(u, v)dv^2 + M(u, v)dudv + N(u, v)du^2, \\ L(u, v) &= (Fg - Gf)(u, v), \\ M(u, v) &= (Eg - Ge)(u, v), \\ N(u, v) &= (Ef - Fe)(u, v). \end{aligned} \quad (1.22)$$

Essa superfície é de classe  $C^{k-2}$ , pois  $\alpha$  é de classe  $C^k$  e na carta  $(u, v, p)$ , com  $p = \frac{dv}{du}$ , a superfície  $\mathcal{H}_\alpha$  é dada por:

$$H(u, v, p) = L(u, v)p^2 + M(u, v)p + N(u, v),$$

e na carta  $(u, v, q)$ , com  $q = \frac{du}{dv}$ , é dada por:

$$\bar{H}(u, v, q) = L(u, v) + M(u, v)q + N(u, v)q^2.$$

**Definição 1.10.** Na carta  $(u, v, p)$ , com  $p = \frac{dv}{du}$ , o campo de linhas de Lie-Cartan é definido por

$$X_H = H_p \frac{\partial}{\partial u} + p H_p \frac{\partial}{\partial v} + (-H_u - p H_v) \frac{\partial}{\partial p}. \quad (1.23)$$

Na carta  $(u, v, q)$ , com  $q = \frac{du}{dv}$ , por

$$X_{\bar{H}} = q \bar{H}_q \frac{\partial}{\partial u} + \bar{H}_q \frac{\partial}{\partial v} + (-\bar{H}_v - q \bar{H}_u) \frac{\partial}{\partial q}. \quad (1.24)$$

As projeções das curvas integrais de  $X_H$  por  $\pi$  são as linhas de curvatura principal de  $M^2$  e satisfazem  $p = \frac{dv}{du}$ . Além disso, os campos são tangentes à superfície de Lie-Cartan, pois

$$\begin{aligned} \langle X_H, \nabla H \rangle &= H_p H_u + p H_p H_v + (-H_u - p H_v) H_p = 0, \\ \langle X_{\bar{H}}, \nabla H \rangle &= q \bar{H}_q \bar{H}_u + \bar{H}_q \bar{H}_v + (-\bar{H}_v - q \bar{H}_u) \bar{H}_q = 0. \end{aligned}$$

A seguir a definição de ponto umbílico Darbouxianos.

**Definição 1.11.** Seja  $\alpha : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma carta de  $M^2$ . Um ponto umbílico  $p \in U$  é Darbouxiano se satisfaz as condições T) e D) abaixo:

T) (**Condição de transversalidade**) A superfície de Lie-Cartan,  $\mathcal{H}_\alpha$ , é regular também sobre  $\pi^{-1}(p)$ .

D) (**Condição do discriminante**) As singularidades do campo de Lie-Cartan, sobre  $\pi^{-1}(p)$  são hiperbólicas e dadas por um dos seguintes casos:

$D_1$  : uma única sela, ou

$D_2$  : um único nó e duas selas, ou

$D_3$  : três selas

A carta de Monge é escrever, localmente, a superfície como gráfico sob o espaço tangente. Na vizinhança de um ponto umbílico obtemos tal carta de Monge da seguinte



maneira: no ponto umbílico as curvaturas principais coincidem e portanto define uma única direção principal, digamos  $E_1$ . Escolha um outro vetor ortonormal  $E_2$  de modo que  $E_1, E_2$  e o normal a superfície formem uma base de  $\mathbb{R}^3$ . Achar a carta de monge significa escrever a superfície como gráfico de uma função  $h(u, v)$  nessa base.

O próximo teorema exhibe as condições dos pontos umbílicos darbouxianos na carta de Monge. Essas condições são obtidas com a análise das singularidades do campo de Lie-Cartan.

**Teorema 1.1** (Gutierrez e Sotomayor [10],[6]). *Seja  $p$  um ponto umbílico de uma imersão  $\alpha$  de classe  $C^r$ , expressa na carta de Monge por  $\alpha(u, v) = (u, v, h(u, v))$ , onde*

$$h(u, v) = \frac{k}{2}(u^2 + v^2) + \frac{a}{6}u^3 + \frac{b}{2}uv^2 + \frac{c}{6}v^3 + O(4).$$

*Suponha que as seguintes condições são satisfeitas:*

$$T) \quad b(b - a) \neq 0$$

$$D_1) \quad \left(\frac{c}{2b}\right)^2 - \frac{a}{b} + 2 < 0$$

$$D_2) \quad \left(\frac{c}{2b}\right)^2 + 2 > \frac{a}{b} > 1, \quad a \neq 2b$$

$$D_3) \quad \frac{a}{b} < 1$$

*Então, cada folheação principal tem, em uma vizinhança da origem, um setor hiperbólico no caso  $D_1$ , um setor parabólico no caso  $D_2$  e três setores hiperbólicos no caso  $D_3$ . Os umbílicos são chamados Darbouxianos dos tipos  $D_1, D_2$  e  $D_3$  (figura 1.5).*

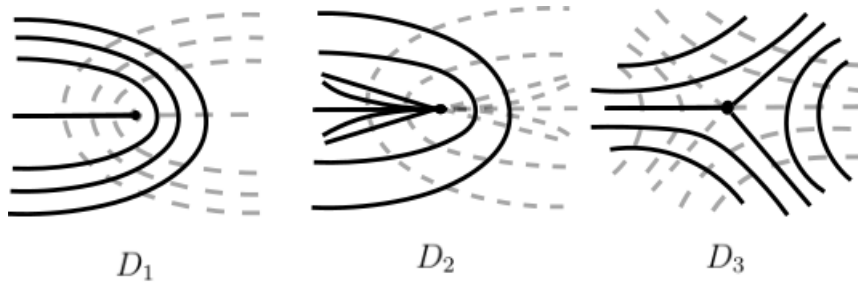


Figura 1.4: Comportamento das linhas de curvatura próxima aos pontos umbílicos Darbouxianos.

Os índices  $i = 1, 2, 3$  de  $D_i$  indicam o número de separatrizes umbílicas de  $p$ , que são linhas de curvatura principal tendendo a  $p$  e que separam regiões de diferentes padrões de aproximação a  $p$ .

**Exemplo 1.6.** O elipsoide,

$$M^2 = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3; \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \right\},$$

com  $a > b > c > 0$  tem quatro pontos umbílicos  $(\pm x_0, 0, \pm z_0)$ , onde  $x_0 = a\sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2}}$  e  $z_0 = c\sqrt{\frac{b^2 - c^2}{a^2 - c^2}}$  e todos são do tipo  $D_1$  (figura 1.6).

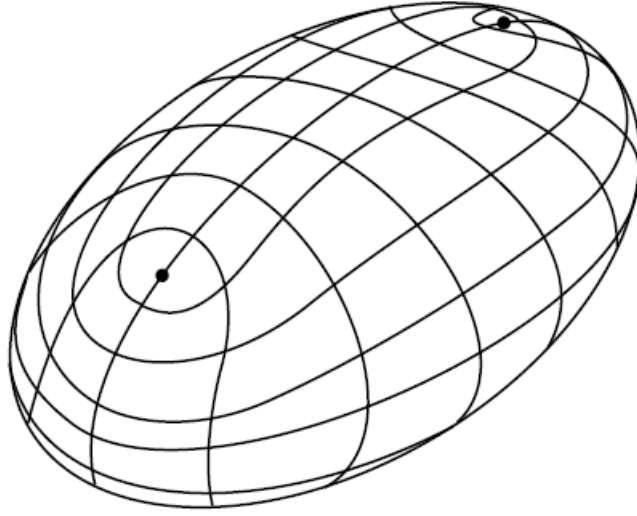


Figura 1.5: Superfície  $M^2$  e suas linhas de curvatura.

Considere a carta local  $\alpha(x, y) = (x, y, H(x, y))$ , onde

$$H(x, y) = \frac{c\sqrt{4a^2b^2 - 4x^2b^2 - 4y^2a^2}}{2ba}.$$

Calculando os coeficientes da primeira e segunda forma segue que a equação diferencial das linhas de curvatura é

$$\begin{aligned}
E &= \frac{-a^2x^2b^2 + a^4b^2 - a^4y^2 + c^2b^2x^2}{(-x^2b^2 + a^2b^2 - y^2a^2)a^2}, \\
F &= \frac{c^2yx}{-x^2b^2 + a^2b^2 - y^2a^2}, \\
G &= \frac{-b^4x^2 + b^4a^2 - b^2y^2a^2 + c^2a^2y^2}{(-x^2b^2 + a^2b^2 - y^2a^2)b^2}, \\
e &= \frac{-cb^2a^2(b^2 - y^2)(-x^2b^2 + a^2b^2 - y^2a^2)}{\sqrt{-a^2b^4x^2 + a^4b^4 - a^4b^2y^2 + c^2b^4x^2 + c^2a^4y^2}}, \\
f &= \frac{-cb^2a^2xy(-x^2b^2 + a^2b^2 - y^2a^2)}{\sqrt{-a^2b^4x^2 + a^4b^4 - a^4b^2y^2 + c^2b^4x^2 + c^2a^4y^2}}, \\
g &= \frac{-cb^2a^2(-x^2 + a^2)(-x^2b^2 + a^2b^2 - y^2a^2)}{\sqrt{-a^2b^4x^2 + a^4b^4 - a^4b^2y^2 + c^2b^4x^2 + c^2a^4y^2}}.
\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
(Fg - Gf)(x, y) &= \frac{(b^2 - c^2)a^2xyc}{\sqrt{-a^2b^4x^2 + a^4b^4 - a^4b^2y^2 + c^2b^4x^2 + c^2a^4y^2}(-x^2b^2 + a^2b^2 - y^2a^2)}, \\
(Eg - Ge)(x, y) &= -\frac{(a^4b^2 - b^4a^2 + b^2y^2a^2 - a^2x^2b^2 - c^2a^2y^2 + c^2b^2x^2)c}{\sqrt{-a^2b^4x^2 + a^4b^4 - a^4b^2y^2 + c^2b^4x^2 + c^2a^4y^2}(-x^2b^2 + a^2b^2 - y^2a^2)}, \\
(Fg - Gf)(x, y) &= \frac{(a^2 - c^2)cb^2xy}{\sqrt{-a^2b^4x^2 + a^4b^4 - a^4b^2y^2 + c^2b^4x^2 + c^2a^4y^2}(-x^2b^2 + a^2b^2 - y^2a^2)}.
\end{aligned}$$

E os pontos umbílicos são os  $(x, y)$  tais que  $(Fg - Gf)(x, y) = 0 = (Eg - Ge)(x, y)$ , fazendo essa conta encontramos os dois pontos umbílicos  $(x_0, 0, z_0)$  e  $(-x_0, 0, z_0)$ . Considerando a carta local  $\beta(x, y) = (x, y, -H(x, y))$ , teremos que  $(x_0, 0, -z_0)$  e  $(-x_0, 0, -z_0)$  são os pontos umbílicos nessa carta local.

Para verificar que os pontos umbílicos são do tipo  $D_1$  usemos o teorema 1.1, ou seja, precisamos da carta de monge de  $M^2$ . No ponto umbílico  $(x_0, 0, z_0)$  considere a seguinte base ortonormal  $\{E_1, E_2, E_3\}$ , onde

$$\begin{aligned}
E_1 &= \left( \frac{z_0}{c^2\Delta}, 0, \frac{-x_0}{a^2\Delta} \right) \\
E_2 &= (0, 1, 0), \\
E_3 &= \left( \frac{x_0}{a^2\Delta}, 0, \frac{z_0}{c^2\Delta} \right), \\
\Delta &= \sqrt{\frac{x_0^2}{a^4} + \frac{z_0^2}{c^4}}.
\end{aligned} \tag{1.25}$$

Nessa base, vamos achar a expansão de taylor de  $W$  de modo que satisfaça a seguinte

mudança de coordenadas

$$(x, y, z) = (x_0, 0, z_0) + uE_1 + vE_2 + WE_3, \text{ ou seja,}$$

$$\begin{aligned} x &= x_0 + \frac{z_0 u}{c^2 \Delta} + \frac{x_0}{a^2 \Delta}, \\ y &= v, \\ z &= z_0 + \frac{-x_0 u}{a^2 \Delta} + \frac{z_0 W}{c^2 \Delta}. \end{aligned} \tag{1.26}$$

Substituindo essas expressões (1.26) na equação que define o elipsoide teremos essa superfície dependendo de  $u$  e  $v$ . Substituindo nessa equação  $u = v = 0$  segue que  $W(0, 0) = 0$ . Ao derivar a expressão em relação a  $u$  obtemos  $W_u(0, 0) = 0$ . De modo análogo,  $W_v(0, 0) = 0$ . Com esses cálculos segue que nas coordenadas  $(u, v)$  o elipsoide é coberto pela carta  $\alpha(u, v) = (u, v, W(u, v))$ , onde a aproximação da função  $W(u, v)$  até ordem 3 é

$$W(u, v) = \frac{-ac}{2b^3}(u^2 + v^2) - \frac{ac}{2b^6}\sqrt{a^2 - b^2}\sqrt{b^2 - c^2}(u^2 + v^2)u + O(4). \tag{1.27}$$

Observe que

$$0 - 6 \left( \frac{\frac{-ac}{2b^3}(u^2 + v^2) - \frac{ac}{2b^6}\sqrt{a^2 - b^2}\sqrt{b^2 - c^2}}{\frac{-ac}{2b^3}(u^2 + v^2) - \frac{ac}{2b^6}\sqrt{a^2 - b^2}\sqrt{b^2 - c^2}} \right) + 2 = -6 + 2 = -4 < 0,$$

isto é, a condição  $D_1$  é satisfeita e esse ponto umbílico é Darbouxiano do tipo  $D_1$ . Devido a simetria do elipsoide a análise dos demais pontos são análogas.

## 1.6 Mapa de Poincaré

Seja  $\alpha$  uma carta local de  $M^2$  e  $x(t) = \alpha(u(t), v(t))$  uma curva de  $M^2$ . Vamos definir o Mapa de Poincaré associado a  $x$ . Essa definição está baseada no teorema do fluxo tubular, que pode ser visto no livro do Sotomayor [17]. Em  $p = x(0)$  considere uma seção transversal local  $\Gamma$  a  $x$ . Por esse teorema, para cada  $q \in \Gamma$  suficiente próximo de  $p$  a linha de curvatura que passa por  $q$  permanece na vizinhança de  $x$ . A seguir  $(\Gamma, p)$  denota a seção transversal local passando por  $p$ .

**Definição 1.12.** O Mapa de Poincaré  $\Pi : (\Gamma, p) \rightarrow (\Gamma, p)$  é o primeiro ponto em que a solução das equação diferencial das linhas de curvatura

$$L(u, v)dv^2 + M(u, v)dudv + N(u, v)du^2 = 0$$

partindo de  $q$  volta a interceptar a seção  $\Gamma$ . Veja figura 1.6.

Em outros trabalhos  $\Pi$  é chamada de Aplicação de Primeiro retorno [21] ou Transformação de Poincaré [17].

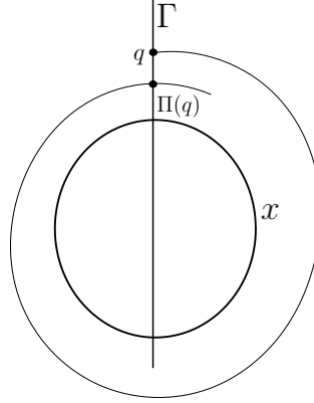


Figura 1.6: Mapa de Poincaré

**Definição 1.13.** O ciclo principal é uma linha de curvatura fechada. Ele é dito hiperbólico quando  $\Pi'(0) \neq 1$  e semi-hiperbólico quando  $\Pi'(0) = 1$  e  $\Pi''(0) \neq 0$ .

Essas são as noções preliminares para uma melhor compreensão do capítulo 3. Parte do trabalho onde estudaremos o artigo [1], que analisa a estabilidade da configuração principal de superfícies algébricas não compactas.

## Capítulo 2

# Compactificação de Curvas e Superfícies algébricas

Este capítulo tem por objetivo elencar os resultados e teoremas usados para compreender o artigo [1], bem como as notações e conceitos usadas no referido trabalho.

### 2.1 Superfície Algébrica

**Definição 2.1.** Seja  $\alpha : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  um polinômio de três variáveis de grau  $n$ , e o escreva na forma

$$\alpha(x, y, z) = \alpha_n(x, y, z) + \alpha_{n-1}(x, y, z) + \dots + \alpha_0(x, y, z),$$

onde,  $\alpha_h(x, y, z) = \sum_{i,j,k=0}^h a_{i,j,k} x^i y^j z^k$  (para  $i + j + k = h$  e  $h = 0, 1, \dots, n$ ) é um polinômio homogêneo de grau  $h$ . A superfície algébrica, denotada por  $A(\alpha)$ , é o conjunto de zeros do polinômio  $\alpha$ :

$$A(\alpha) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; \alpha(x, y, z) = 0\}.$$

Dessa forma, o conjunto com apenas um ponto é uma superfície algébrica e um exemplo é  $A(\alpha) = \{(0, 0, 0)\}$ , onde  $\alpha(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ .

Dando continuidade as notações, defina a norma do ponto  $s = (x, y, z)$  por  $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$  e o gradiente da função polinomial  $\alpha$  por  $\nabla\alpha(x, y, z) = \frac{\partial\alpha}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial\alpha}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial\alpha}{\partial z} \frac{\partial}{\partial z}$  e com isso segue as definições.

**Definição 2.2.** Dada uma superfície algébrica  $A(\alpha)$ .

- a) Diz-se que  $p$  é ponto singular dessa superfície quando o gradiente de  $\alpha$  em  $p$  é nulo. Caso contrário  $p$  é ponto regular. Denota-se o conjunto dos pontos singulares por

$$C(\alpha) = \{(x, y, z) \in A(\alpha); \nabla\alpha(x, y, z) = (0, 0, 0)\},$$

e regulares

$$S(\alpha) = \{(x, y, z) \in A(\alpha); \nabla\alpha(x, y, z) \neq (0, 0, 0)\}.$$

- b) A aplicação normal de Gauss  $N_\alpha : S(\alpha) \rightarrow \mathbb{S}^2$  é definido por  $N_\alpha(x, y, z) = \frac{\nabla\alpha(x, y, z)}{|\nabla\alpha(x, y, z)|}$ .
- c) Os autovalores  $k_\alpha^1(p)$  e  $k_\alpha^2(p)$  da matriz  $-DN_\alpha(p)$ , com  $k_\alpha^1(p) \leq k_\alpha^2(p)$ , definem as curvaturas principais. Diz-se que  $k_\alpha^1(p)$  é a curvatura mínima em  $p$  e  $k_\alpha^2(p)$  é a máxima. Nos pontos em que tais curvaturas principais coincidem diz-se que  $p$  é ponto umbílico e denota-se por

$$U(\alpha) = \{p \in A(\alpha); k_\alpha^1(p) = k_\alpha^2(p)\}.$$

- d) Sejam

$$L_1(\alpha) = \{v \in T_p S(\alpha); DN_\alpha(p)(v) = -k_\alpha^1(p)(v)\},$$

$$L_2(\alpha) = \{v \in T_p S(\alpha); DN_\alpha(p)(v) = -k_\alpha^2(p)(v)\},$$

os autoespaços associados aos autovalores de  $DN_\alpha(p)$ . Diz-se que as curvas integrais do campo  $L_i(\alpha)$  são chamadas de linhas de curvatura mínima ( $i = 1$ ) e máxima ( $i = 2$ ) de  $A(\alpha)$ .

- e) A rede  $(F_1(\alpha), F_2(\alpha))$  de curvas ortogonais em  $S(\alpha) \setminus U(\alpha)$ , definida pela folheação integral  $F_1(\alpha)$  e  $F_2(\alpha)$  do campo de linhas  $L_1(\alpha)$  e  $L_2(\alpha)$ , será chamado rede principal em  $A(\alpha)$ .

**Exemplo 2.1.** Considere o paraboloide  $A(\alpha) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 = z\}$ . Tal superfície é regular, pois o vetor  $\nabla\alpha(x, y, z) = (2x, 2y, -1)$  nunca se anula, ou seja essa superfície algébrica é regular. Além disso, a aplicação normal de Gauss é

$$N_\alpha(x, y, z) = \left( \frac{2x}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}}, \frac{2y}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}}, \frac{-1}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}} \right).$$

Para calcular o operador  $DN_\alpha(p)$ , considere a carta  $\varphi(u, v) = (u \cos(v), u \sin(v), u^2)$  então os vetores  $\varphi_u = (\cos(v), \sin(v), 2u)$  e  $\varphi_v = (-u \sin(v), u \cos(v), 0)$  formam uma base para o espaço tangente a  $S(\alpha)$ . Veja que

$$DN_\alpha(p)(\varphi_u) = (N \circ \varphi)_u = \left( \frac{2 \cos(v)}{\sqrt{(4u^2 + 1)^3}}, \frac{2 \sin(v)}{\sqrt{(4u^2 + 1)^3}}, \frac{4u}{\sqrt{(4u^2 + 1)^3}} \right) = \frac{2}{\sqrt{(4u^2 + 1)^3}} \varphi_u,$$

$$DN_\alpha(p)(\varphi_v) = (N \circ \varphi)_v = \left( \frac{-2u \sin(v)}{\sqrt{4u^2 + 1}}, \frac{2u \cos(v)}{\sqrt{4u^2 + 1}}, 0 \right) = \frac{2}{\sqrt{4u^2 + 1}} \varphi_v$$

então

$$DN_\alpha(p) = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{(4u^2+1)^3}} & 0 \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{4u^2+1}} \end{bmatrix},$$

Pela carta  $z = u^2$  e para todo  $u \in \mathbb{R}$  a função  $\frac{2}{\sqrt{(4u^2+1)^3}}$  é menor ou igual a  $\frac{2}{\sqrt{4u^2+1}}$  sendo que a igualdade dos autovalores ocorre apenas quando  $u = 0$  e portanto as curvaturas principais são  $k_\alpha^1(x, y, z) = \frac{-2}{\sqrt{4z+1}}$ ,  $k_\alpha^2(x, y, z) = \frac{-2}{\sqrt{(4z+1)^3}}$  e o único ponto umbílico é  $(0, 0, 0)$ . Dessa forma os autoespaços de  $DN_\alpha$  são

$$L_1(\alpha) = \{(0, b) \in T_p S(\alpha)\},$$

$$L_2(\alpha) = \{(a, 0) \in T_p S(\alpha)\},$$

e as solução do campo  $L_2(\alpha)$  satisfaz a equação diferencial  $(u'(t), v'(t)) = (a, 0)$ . Passando pelo ponto  $(c_1, c_2)$  em  $t=1$  a solução é  $u(t) = c_1 t$  e  $v(t) = c_1$ , onde  $c_1$  e  $c_2$  são constantes. Desse modo,  $F_2(\alpha) = (c_1 t \cos(c_2), c_1 t \sin(c_2), c_1^2 t^2)$ , parábolas são as folheações máximas. De modo análogo as soluções de  $L_1(\alpha)$  passando pelo mesmo ponto é  $F_1(\alpha) = (c_1 \cos(c_2 t), c_1 \sin(c_2 t), c_1^2)$ , os círculos são as folheações mínimas. Assim, as redes principais desse paraboloide é o par de soluções  $F_1(\alpha)$  (círculos) e  $F_2(\alpha)$  (parábolas) e a Figura 2.1 ilustra esse par passando pelo ponto  $(\frac{4}{\pi}, \frac{4}{\pi}, \frac{32}{\pi^2})$ .

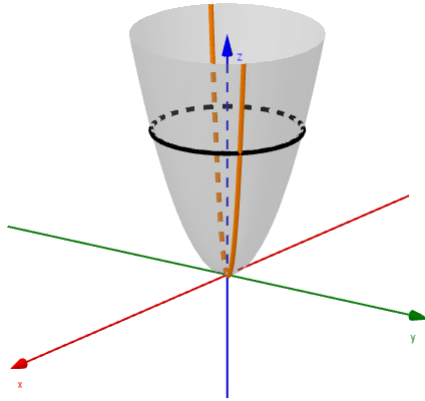


Figura 2.1: Linhas de curvatura principal de  $A(\alpha)$  para  $c_2 = \frac{\pi}{4}$  e  $c_1 = \frac{4\sqrt{2}}{\pi}$ .

Os próximos resultados referem-se a compactificação de curva e superfície algébrica, a começar pelas curvas por que podemos exemplificar com figuras.



## 2.2 Compactificação de Curva Algébrica

Neste capítulo considere que  $\mathbb{R}^n$  está munido da topologia euclidiana. Nela um conjunto  $A \subset \mathbb{R}^n$  é aberto se para todo  $y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in A$  existe um número real  $r$  positivo tal que a bola

$$B(y, r) = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n; \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2} < r\},$$

está contida em  $A$ . Os abertos de  $\mathbb{S}^n$  são os induzidos pela topologia de  $\mathbb{R}^{n+1}$ , isto é, os abertos são os conjuntos  $B = A \cap \mathbb{S}^n$  tal que  $A$  é aberto de  $\mathbb{R}^{n+1}$ , onde

$$\mathbb{S}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}; \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \dots + (x_{n+1} - y_{n+1})^2} = 1\}.$$

O artigo [1] de Garcia e Sotomayor já define a compactificação de superfícies algébricas. No entanto (de modo análogo ao artigo [1]) para uma melhor compreensão dessa definição escolhemos, começar pela definição da compactificação de curvas algébricas. Essa escolha é feita porque para curvas conseguimos fazer desenhos da curva compactificada. Para um estudo com definição e exemplos de curvas algébricas planas veja [11].

A *compactificação de curva algébrica* vai ser definida por três difeomorfismos. O primeiro é  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow P$  definido por  $f(x, y) = (x, y, 1)$ , onde  $P$  é o plano  $z = 1$ , cuja inversa é  $f^{-1}(x, y, 1) = (x, y)$ . Os outros difeomorfismos são as projeções centrais  $\Pi^+ : P \rightarrow \mathbb{H}^+$ ,  $\Pi^- : P \rightarrow \mathbb{H}^-$ , onde  $\mathbb{H}^+ = \{(x, y, z) \in \mathbb{S}^2 | z > 0\}$  e  $\mathbb{H}^- = \{(x, y, z) \in \mathbb{S}^2 | z < 0\}$ .

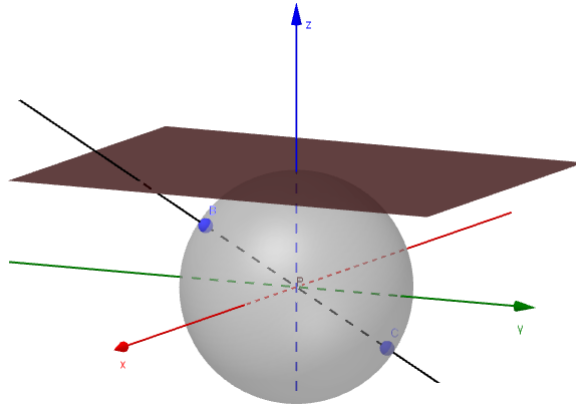


Figura 2.2: Construção geométrica das projeções centrais.

Para definir tais projeções, considere a reta que passa pela origem e pelo ponto  $(x, y, 1) \in P$ , então essa reta intersecta a esfera em dois pontos (ver figura 2.2), o ponto de  $\mathbb{H}^+$  será o  $\Pi^+(x, y, 1)$  e o de  $\mathbb{H}^-$  será o  $\Pi^-(x, y, 1)$ .

Para obter as expressões das projeções, considere a equação paramétrica da reta que passa pela origem e um ponto do plano  $P$  dada por  $r(t) = (0, 0, 0) + t(x, y, 1) = (tx, ty, t)$ . Os pontos das projeções centrais são os  $t$  para os quais  $|r(t)|^2 = 1$ , isto é,  $t^2(x^2 + y^2 + 1) = 1$ ,

consequentemente  $t = \pm \frac{1}{\Delta}$ , onde  $\Delta = \sqrt{x^2 + y^2 + 1}$ . Portanto,

$$\begin{aligned}\Pi^+(x, y, 1) &= \left( \frac{x}{\Delta}, \frac{y}{\Delta}, \frac{1}{\Delta} \right), \\ \Pi^-(x, y, 1) &= \left( \frac{-x}{\Delta}, \frac{-y}{\Delta}, \frac{-1}{\Delta} \right).\end{aligned}$$

Sem perda de generalidade, estaremos escrevendo  $\Pi^+(x, y)$  (resp.  $\Pi^-(x, y)$ ) para denotar  $\Pi^+(x, y, 1)$  (resp.  $\Pi^-(x, y, 1)$ ).

Agora, observe a expressão das projeções centrais, se o ponto  $(x, y)$  tende a infinito segue que  $\Delta$  também tende a infinito e então  $1/\Delta$  tende a zero. Isso quer dizer que o limite de  $\Pi^+(x, y)$  é um ponto de  $\mathbb{S}^1 \times \{0\}$ , como segue

$$\lim_{(x,y) \rightarrow \infty} \Pi^+(x, y) = \lim_{(x,y) \rightarrow \infty} \left( \frac{x}{\Delta}, \frac{y}{\Delta}, \frac{1}{\Delta} \right) = \left( \lim_{(x,y) \rightarrow \infty} \frac{x}{\Delta}, \lim_{(x,y) \rightarrow \infty} \frac{y}{\Delta}, 0 \right).$$

Como todos os pontos do plano tem um representante em  $\mathbb{S}^2$ , desse limite, concluímos que os pontos do infinito do plano estão em  $\mathbb{S}^1 \times \{0\}$ .

**Definição 2.3.** Seja  $\alpha : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  um polinômio de grau  $n$  escrito na forma  $\alpha(x) = \alpha_n(x) + \alpha_{n-1}(x) + \dots + \alpha_0(x)$ , onde  $x \in \mathbb{R}^n$  e  $\alpha_h$  é homogêneo de grau  $h$  ( $h = 0, 1, \dots, n$ ). Chamamos a função  $\alpha^c(x, z) = \alpha_n(x) + z\alpha_{n-1}(x) + \dots + z^n\alpha_0(x, z)$  de homogeneização de  $\alpha$ .

**Exemplo 2.2.** Considere o polinômio  $\alpha(x, y) = x^5 + yx^3 + y^3 + y^2 + x + 1$  então

$$\begin{aligned}\alpha_5(x, y) &= x^5, \\ \alpha_4(x, y) &= yx^3, \\ \alpha_3(x, y) &= y^3, \\ \alpha_2(x, y) &= y^2, \\ \alpha_1(x, y) &= x, \\ \alpha_0(x, y) &= 1.\end{aligned}$$

então a homogeneização de  $\alpha$  é

$$\alpha^c(x, y, z) = x^5 + zyx^3 + z^2y^3 + z^3y^2 + z^4x + z^5.$$

**Proposição 2.1.** Seja  $\alpha(x, y) = \alpha_n(x, y) + \alpha_{n-1}(x, y) + \dots + \alpha_0(x, y)$  o polinômio de grau  $n$  que define a curva algébrica  $A(\alpha) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / \alpha(x, y) = 0\}$ .

Se  $\alpha^c(x, y, z) = \alpha_n(x, y) + z\alpha_{n-1}(x, y) + \dots + z^n\alpha_0(x, y)$  então

$$\begin{aligned}\alpha^c \circ \Pi^+(x, y) &= \frac{1}{\Delta^n} \alpha(x, y), \\ \alpha^c \circ \Pi^-(x, y) &= \frac{(-1)^n}{\Delta^n} \alpha(x, y).\end{aligned}$$

*Demonstração.* Usando as definições das projeções centrais e de  $\alpha^c$  temos que

$$\alpha^c \circ \Pi^+(x, y) = \alpha^c\left(\frac{x}{\Delta}, \frac{y}{\Delta}, \frac{1}{\Delta}\right) = \alpha_n\left(\frac{x}{\Delta}, \frac{y}{\Delta}\right) + \frac{1}{\Delta}\alpha_{n-1}\left(\frac{x}{\Delta}, \frac{y}{\Delta}\right) + \dots + \frac{1}{\Delta^n}\alpha_0(x, y).$$

Como os polinômios  $\alpha_h$  são homogêneos de grau  $h$ , segue que  $\alpha_h\left(\frac{x}{\Delta}, \frac{y}{\Delta}\right) = \frac{1}{\Delta^h}\alpha_h(x, y)$  para  $h = 0, 1, \dots, n$ . Ou seja,

$$\begin{aligned}&\alpha_n\left(\frac{x}{\Delta}, \frac{y}{\Delta}\right) + \frac{1}{\Delta}\alpha_{n-1}\left(\frac{x}{\Delta}, \frac{y}{\Delta}\right) + \dots + \frac{1}{\Delta^n}\alpha_0(x, y) = \\ &= \frac{1}{\Delta^n}\alpha_n(x, y) + \frac{1}{\Delta^n}\alpha_{n-1}(x, y) + \dots + \frac{1}{\Delta^n}\alpha_0(x, y) = \frac{1}{\Delta^n}\alpha(x, y)\end{aligned}$$

Portanto,

$$\alpha^c \circ \Pi^+(x, y) = \frac{1}{\Delta^n} \alpha(x, y).$$

Pelos mesmos argumentos teremos que

$$\alpha^c \circ \Pi^-(x, y) = \frac{(-1)^n}{\Delta^n} \alpha(x, y).$$

■

Pela relação da proposição anterior podemos pensar em percorrer o caminho descrito pelo mapa da figura 2.3. Dada a curva no plano real chegamos ao ambiente da compactificação: a esfera, como segue a definição 2.4, dada em [1].

**Definição 2.4.** Dada uma curva algébrica  $A(\alpha)$  de grau  $n$ , a sua compactificação, denotada por  $A^c(\alpha)$ , é o conjunto algébrico obtido pela interseção dos pontos na esfera  $\mathbb{S}^2$  com os zeros da homogeneização

$$\alpha^c(x, y, z) = \alpha_n(x, y) + \alpha_{n-1}(x, y)z + \dots + \alpha_1(x, y)z^{n-1} + \alpha_0(x, y)z^n,$$

de  $\alpha$ .

**Exemplo 2.3.** Seja  $A(\alpha) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; \alpha(x, y) = x^2 + y^2 = 0\} = \{(0, 0)\}$ , sua compactificação é

$$\begin{aligned}A^c(\alpha) = A(\alpha^c) \cap \mathbb{S}^2 &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 = 0, x^2 + y^2 + z^2 = 1\} = \\ &= \{(0, 0, 1), (0, 0, -1)\},\end{aligned}$$

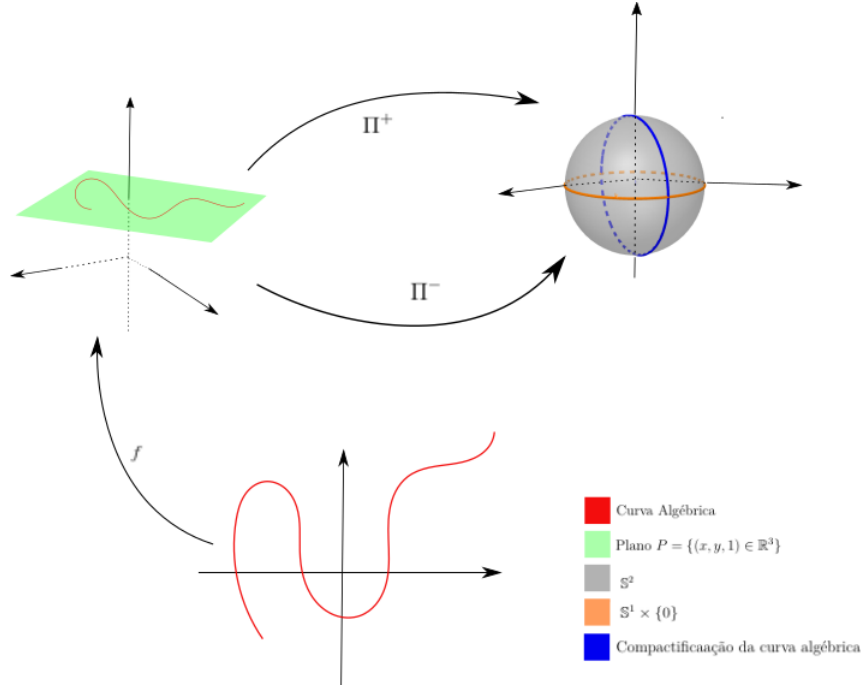


Figura 2.3: Ilustração da ação dos difeomorfismos na compactificação de uma curva algébrica

somente as cópias desse ponto nos hemisférios, isso é o esperado, pois essa curva algébrica é compacta.



Figura 2.4: Do lado direito a curva algébrica formado somente por um único ponto. Do lado esquerdo, de preto, estão ilustrados as cópias de  $A(\alpha) = \{(0, 0)\}$  em  $\mathbb{S}^2$

**Exemplo 2.4.** Seja  $A(\beta) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; \beta(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0\}$ , sua compactificação é

$$\begin{aligned} A^c(\beta) &= A(\beta^c) \cap \mathbb{S}^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 - z^2 = 0, x^2 + y^2 + z^2 = 1\} = \\ &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; z^2 + z^2 = 1, x^2 + y^2 + z^2 = 1\} = \\ &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; z = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}, x^2 + y^2 = \frac{1}{2}\}, \end{aligned}$$

somente sua cópia nos hemisférios.



Figura 2.5: Do lado esquerdo o círculo unitário. Do lado direito, de preto estão ilustrados as cópias deste círculo.

**Exemplo 2.5.** Seja  $A(\eta) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; \eta(x, y) = x - y = 0\}$ , a reta passando pela origem. Sua compactificação é

$$\begin{aligned} A^c(\eta) &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x - y = 0, x^2 + y^2 + z^2 = 1\} = \\ &= \{(x, x, z) \in \mathbb{R}^3; 2x^2 + z^2 = 1\} = \\ &= V_1 \cup V_2 \cup V_3, \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} V_1 &= \{(x, x, \sqrt{1 - 2x^2}) \in \mathbb{R}^3; -1 < x < \frac{1}{\sqrt{2}}\}, \\ V_2 &= \{(x, x, 0) \in \mathbb{R}^3; x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}\}, \\ V_3 &= \{(x, x, -\sqrt{1 - 2x^2}) \in \mathbb{R}^3; -1 < x < \frac{1}{\sqrt{2}}\}. \end{aligned}$$

Sendo  $V_1$  e  $V_3$  cópias de  $A(\eta)$  em  $\mathbb{H}^+$  e  $\mathbb{H}^-$ , respectivamente. E  $V_2$  pontos de  $E_1(\eta)$ .

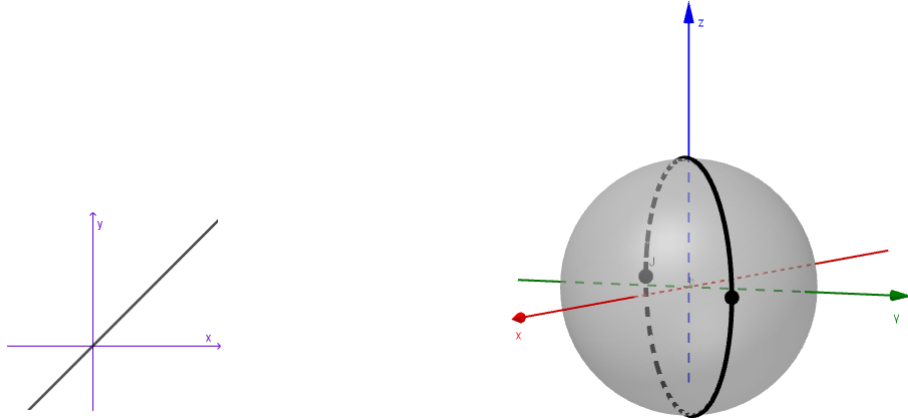


Figura 2.6: Do lado esquerdo a reta e no lado direito sua compactificação.

**Exemplo 2.6.** Seja  $A(\delta) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / \delta(x, y) = y - x^3 = 0\}$ , sua compactificação é

$$\begin{aligned} A^c(\delta) &= A(\delta^c) \cap \mathbb{S}^2 = \\ &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; yz^2 - x^3 = 0, x^2 + y^2 + z^2 = 1\} = \\ &= V_1 \cup V_2 \cup V_3, \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} V_1 &= \{(x, y, \sqrt{1 - x^2 - y^2}) \in \mathbb{R}^3; y(1 - x^2 - y^2) - x^3 = 0\}, \\ V_2 &= \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 = 1, x = 0, y = \pm 1\} = \{(0, 1, 0), (0, -1, 0)\}, \\ V_3 &= \{(x, y, -\sqrt{1 - x^2 - y^2}) \in \mathbb{R}^3; y(1 - x^2 - y^2) - x^3 = 0\}. \end{aligned}$$

Sendo  $V_1$  e  $V_3$  cópias de  $A(\delta)$  em  $\mathbb{H}^+, \mathbb{H}^-$ , respectivamente e  $V_2$  pontos de  $E_3(\delta)$ . A Figura 2.7 ilustra esfera e  $\delta^c$ , permitindo intuir a curva de interseção entre eles que vai ser justamente a compactificação da curva algébrica  $y = x^3$ .

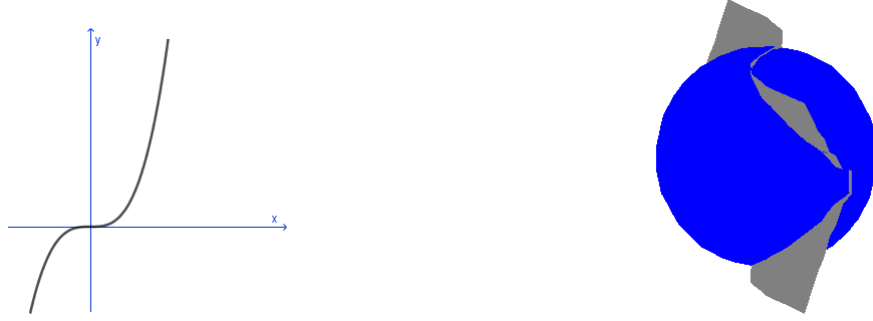


Figura 2.7: Do lado esquerdo a curva algébrica  $A(\delta)$  e do lado direito a figura ilustra como é a interseção da esfera com  $A(\delta^c)$ .

O próximo teorema confirma a intuição dos exemplos 2.5 e 2.6, que a compactificação é a união do comportamento algébrico final e as imagens das projeções pela curva algébrica. Também evidenciaremos nestes exemplos o subconjunto da compactificação obtido fazendo  $z = 0$ . Ele é chamado, no artigo [1], de comportamento algébrico final e sua notação segue na definição abaixo.

**Definição 2.5.** O comportamento algébrico final de  $A(\alpha)$  é o conjunto

$$E_n(\alpha) = \{(p, 0) \in \mathbb{S}^1 \times \{0\} / \alpha_n(p) = 0\}.$$

**Teorema 2.1.** *Seja  $A(\alpha)$  uma curva algébrica de grau  $n$ , com  $\alpha = \alpha_n + \dots + \alpha_0$  então*

$$A(\alpha^c) \cap \mathbb{S}^2 = \Pi^+(A(\alpha)) \cup E_n(\alpha) \cup \Pi^-(A(\alpha)).$$

*Demonstração.* Como queremos provar uma igualdade de conjuntos, faremos a demonstração em duas partes.

Parte I):  $A(\alpha^c) \cap \mathbb{S}^2 \subseteq \Pi^+(A(\alpha)) \cup E_n(\alpha) \cup \Pi^-(A(\alpha))$

Se  $(x, y, z) \in A(\alpha^c) \cap \mathbb{S}^2$  então  $\alpha^c(x, y, z) = 0$  e ele é um ponto da esfera. Se está no círculo unitário ( $z = 0$ ) implica que

$$\alpha_n(x, y) = \alpha^c(x, y, 0) = 0.$$

e  $(x, y, 0)$  pertence a  $E_n(\alpha)$ . Caso esteja nos hemisférios ( $z \neq 0$ ), existe o ponto  $\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right)$  de  $\mathbb{R}^2$  tal que, pela expressão das projeções centrais segue que

$$\begin{aligned} \Pi^+\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right) &= \left(\frac{x}{z\Delta}, \frac{y}{z\Delta}, \frac{1}{\Delta}\right) = (x, y, z), \\ \Pi^-\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right) &= \left(\frac{-x}{z\Delta}, \frac{-y}{z\Delta}, \frac{-1}{\Delta}\right) = (x, y, z), \end{aligned} \quad (2.1)$$

onde  $\Delta = \sqrt{\frac{x^2}{z^2} + \frac{y^2}{z^2} + 1} = \sqrt{\frac{x^2 + y^2 + z^2}{z^2}} = \frac{1}{|z|}$ , pois a norma de  $(x, y, z)$  é sempre 1.

Assim, para terminarmos esta parte basta mostrar que esse ponto  $\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right)$  de  $\mathbb{R}^2$  está na imagem da curva algébrica. Para isso, usemos a relação da proposição 2.1. Dela temos que

$$\begin{aligned} \alpha^c \circ \Pi^+\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right) &= \frac{1}{\Delta^n} \alpha\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right), \\ \alpha^c \circ \Pi^-\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right) &= \frac{(-1)^n}{\Delta^n} \alpha\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right) \end{aligned} \quad (2.2)$$

De (2.1), (2.2) e por  $\alpha^c(x, y, z) = 0$  obtemos que  $\alpha\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right) = 0$ , isto é,  $\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right)$  pertence a  $A(\alpha)$ . Portanto  $(x, y, z) \in \Pi^+(A(\alpha)) \cup \Pi^-(A(\alpha))$ .

Parte II):  $\Pi^+(A(\alpha)) \cup E_n(\alpha) \cup \Pi^-(A(\alpha)) \subseteq A(\alpha^c) \cap \mathbb{S}^2$ . Se  $(x, y, z) \in \Pi^+(A(\alpha)) \cup E_n(\alpha) \cup \Pi^-(A(\alpha))$  então existe  $(a, b) \in A(\alpha)$  tal que

$$\Pi^+(a, b) = (x, y, z), \quad (2.3)$$

ou

$$\Pi^-(a, b) = (x, y, z), \quad (2.4)$$

ou  $(x, y, z) \in E_n(\alpha)$ , isto é,

$$z = 0 \text{ e } \alpha_n(x, y) = 0. \quad (2.5)$$

Em cada caso segue que  $(x, y, z)$  está na esfera e  $\alpha^c(x, y, z) = 0$ . De fato, usando a relação

da proposição 2.1 e a equação (2.3) obteremos

$$\frac{1}{(\sqrt{a^2 + b^2 + 1})^n} \alpha(a, b) = \alpha^c \circ \Pi^+(a, b) = \alpha^c(x, y, z). \quad (2.6)$$

Por hipótese,  $(a, b)$  está em  $A(\alpha)$  então  $\alpha(a, b) = 0$ . Assim, de (2.6) segue que  $\alpha^c(x, y, z) = 0$  e portanto  $\Pi^+(A(\alpha)) \subset A(\alpha^c) \cap \mathbb{S}^2$ . Com a mesma proposição faz-se para equação 2.4 e  $\Pi^-(A(\alpha)) \subset A(\alpha^c) \cap \mathbb{S}^2$ . Por último, os pontos do caso (2.5) implica que  $\alpha^c(x, y, z) = 0$ , por que  $\alpha^c(x, y, 0) = \alpha_n(x, y) = 0$  e segue a parte II). ■

## 2.3 Compactificação de Superfície Algébrica

Analogamente as curvas vamos definir nessa seção a compactificação de superfície algébrica, por meio de difeomorfismos. O primeiro difeomorfismo é  $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow Q$  definido por  $g(x, y, z) = (x, y, z, 1)$ , onde  $Q$  é o hiperplano  $w = 1$  em  $\mathbb{R}^4$ . De fato ele é um difeomorfismo, pois é diferenciável e tem inversa  $g^{-1}(x, y, z, 1) = (x, y, z)$ .

Os outros difeomorfismos são as projeções centrais  $\Pi^+ : Q \rightarrow H^+$ ,  $\Pi^- : Q \rightarrow H^-$ , onde  $H^+ = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{S}^3 | w > 0\}$  e  $H^- = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{S}^3 | w < 0\}$ . Consideremos a reta que passa pela origem e por um ponto  $(x, y, z, 1) \in Q$  então essa reta intersectará  $\mathbb{S}^3$  em dois pontos, o ponto de  $H^+$  será o  $\Pi^+(x, y, z, 1)$  e o de  $H^-$  será o  $\Pi^-(x, y, z, 1)$ .

Umas das diferenças dessa seção para anterior é que a compactificação é um subconjunto de  $\mathbb{R}^4$  e por isso não vão existir desenhos realistas. No entanto, na figura 2.8 fazemos uma ilustração dos domínios trabalhados.

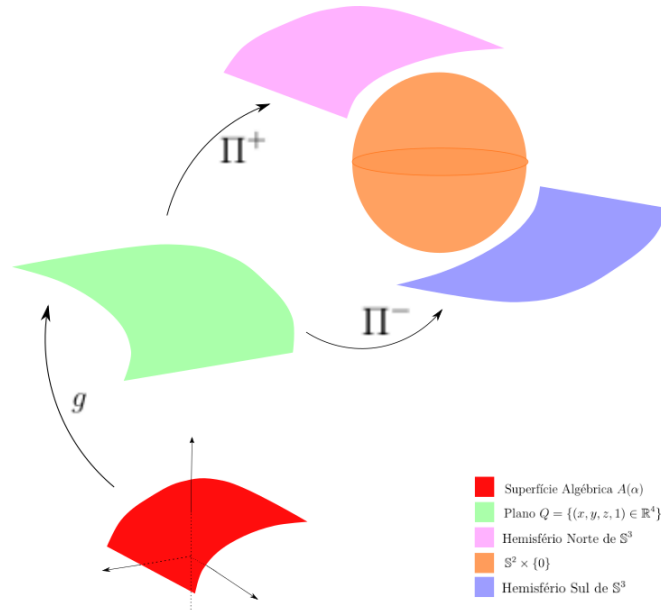


Figura 2.8: Ilustração dos domínios dos difeomorfismos usados na compactificação de uma superfície algébrica



A equação paramétrica da reta que passa pela origem e por um ponto de  $Q$  é  $r_1(t) = (0, 0, 0) + t(x, y, z, 1) = (tx, ty, tz, t)$ , ou seja as interseções são os  $t$  para os quais  $|r_1(t)|^2 = 1$ , isto é  $t^2(x^2 + y^2 + z^2 + 1) = 1$ , conseqüentemente  $t = \pm \frac{1}{\Delta}$ , onde  $\Delta = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 + 1}$ . Portanto,

$$\begin{aligned}\Pi^+(x, y, z, 1) &= \left( \frac{x}{\Delta}, \frac{y}{\Delta}, \frac{z}{\Delta}, \frac{1}{\Delta} \right), \\ \Pi^-(x, y, z, 1) &= \left( \frac{-x}{\Delta}, \frac{-y}{\Delta}, \frac{-z}{\Delta}, \frac{-1}{\Delta} \right).\end{aligned}$$

Sem perda de generalidade, escreveremos  $\Pi^+(x, y, z)$  (resp.  $\Pi^-(x, y, z)$ ) para denotar  $\Pi^+(x, y, z, 1)$  (resp.  $\Pi^-(x, y, z, 1)$ ).

Tomando o limite quando o ponto  $(x, y, z)$  tende ao infinito, ou seja

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y,z) \rightarrow \infty} \Pi^+(x, y, z) &= \lim_{(x,y,z) \rightarrow \infty} \left( \frac{x}{\Delta}, \frac{y}{\Delta}, \frac{z}{\Delta}, \frac{1}{\Delta} \right) = \\ &= \left( \lim_{(x,y,z) \rightarrow \infty} \frac{x}{\Delta}, \lim_{(x,y,z) \rightarrow \infty} \frac{y}{\Delta}, \lim_{(x,y,z) \rightarrow \infty} \frac{z}{\Delta}, 0 \right),\end{aligned}$$

obtemos um ponto na esfera unitária e por isso todos os pontos do infinito estão em  $\mathbb{S}^2$ . Em particular, os pontos finais da superfície algébrica também estão. Veja abaixo a definição de compactificação de uma superfície algébrica.

**Definição 2.6.** Dada uma superfície algébrica  $A(\alpha)$  de grau  $n$ , a sua compactificação, denotada por  $A^c(\alpha)$ , é o conjunto algébrico obtido pela interseção dos pontos na esfera  $\mathbb{S}^3$  com os zeros da homogeneização

$$\alpha^c(x, y, z, w) = \alpha_n(x, y, z) + \alpha_{n-1}(x, y, z)w + \dots + \alpha_1(x, y)w^{n-1} + \alpha_0(x, y, z)w^n,$$

de  $\alpha$ .

**Exemplo 2.7.** Seja  $A(\alpha) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; \alpha(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 = 0\} = \{(0, 0, 0)\}$ , sua compactificação é

$$\begin{aligned}A^c(\alpha) &= A(\alpha^c) \cap \mathbb{S}^3 = \\ &= \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4; x^2 + y^2 + z^2 = 0, x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = 1\} = \\ &= \{(0, 0, 0, 1), (0, 0, 0, -1)\},\end{aligned}$$

somente as cópias desse ponto nos hemisférios  $H^+$  e  $H^-$ .

**Exemplo 2.8.** Seja  $A(\beta) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; \beta(x, y) = x^2 + y^2 - z = 0\}$ , o parabolóide

uma superfície não compacta pois é um conjunto ilimitado, sua compactificação é

$$\begin{aligned} A^c(\beta) &= A(\beta^c) \cap \mathbb{S}^3 = \\ &= \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4; x^2 + y^2 - zw = 0, x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = 1\} = \\ &= W_1 \cup W_2 \cup W_3, \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} W_1 &= \{(x, y, z, \sqrt{1 - x^2 - y^2 - z^2}) \in \mathbb{R}^4; x^2 + y^2 - z(\sqrt{1 - x^2 - y^2 - z^2}) = 0, x^2 + y^2 + z^2 = 1\}, \\ W_2 &= \{(x, y, z, 0) \in \mathbb{R}^4; x^2 + y^2 = 0, x^2 + y^2 + z^2 = 1\} = \{(0, 0, 1, 0), (0, 0, -1, 0)\}, \\ W_3 &= \{(x, y, z, -\sqrt{1 - x^2 - y^2 - z^2}) \in \mathbb{R}^4; x^2 + y^2 + z(\sqrt{1 - x^2 - y^2 - z^2}) = 0, x^2 + y^2 + z^2 = 1\}. \end{aligned}$$

Sendo  $W_1$  e  $W_3$  cópias de  $A(\beta)$  em  $H^+$  e  $H^-$ , respectivamente e  $W_2$  pontos de  $E_2(\beta)$ .

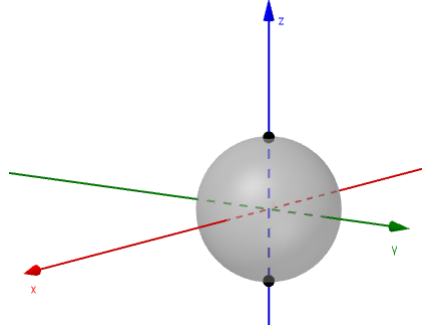


Figura 2.9: Projeção do conjunto  $W_2$  na esfera unitária  $\mathbb{S}^2$ .

**Exemplo 2.9.** Seja  $A(\eta) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; \eta(x, y, z) = x^2 + y^2 - 1 = 0\}$ , o cilindro. Sua compactificação é

$$\begin{aligned} A^c(\eta) &= \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4; x^2 + y^2 - w^2 = 0, x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = 1\} = \\ &= \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4; 2x^2 + 2y^2 + z^2 = 1, w^2 = x^2 + y^2\} = \\ &= W_1 \cup W_2 \cup W_3. \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} W_1 &= \{(x, y, z, \sqrt{x^2 + y^2}) \in \mathbb{R}^4; 2x^2 + 2y^2 + z^2 = 1\}, \\ W_2 &= \{(x, y, z, 0) \in \mathbb{R}^4; x^2 + y^2 = 0, 2x^2 + 2y^2 + z^2 = 1\} = \{(0, 0, 1, 0), (0, 0, -1, 0)\}, \\ W_3 &= \{(x, y, z, -\sqrt{x^2 + y^2}) \in \mathbb{R}^4; 2x^2 + 2y^2 + z^2 = 1\}. \end{aligned}$$

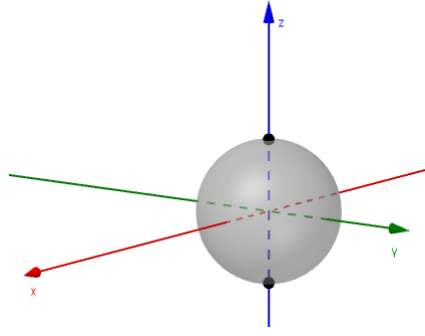


Figura 2.10: Projeção do conjunto  $W_2$  na esfera unitária  $\mathbb{S}^2$ .

**Exemplo 2.10.** Seja  $A(\delta) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; \delta(x, y, z) = x + y - z = 0\}$  um plano. Sua compactificação é

$$\begin{aligned} A^c(\delta) &= \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4; x + y - z = 0, x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = 1\} = \\ &= \{(x, y, x + y, w) \in \mathbb{R}^4; x^2 + y^2 + (x + y)^2 + w^2 = 1\} = \\ &= \{(x, y, x + y, w) \in \mathbb{R}^4; 2x^2 + 2y^2 + 2xy + w^2 = 1\}. \end{aligned}$$

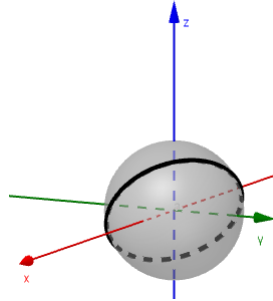


Figura 2.11: Projeção do conjunto  $A^c(\delta) \cap \{w = 0\}$  na esfera unitária  $\mathbb{S}^2$ .

Depois desses exemplos, vamos adotar a notação  $(p, 0)$  para identificar que  $p$  pertence  $\mathbb{S}^2$  e 0 a  $\mathbb{R}$ . Além dessa notação daremos um nome ao subconjunto da compactificação obtido fazendo  $w = 0$  (veja exemplos 2.9, 2.6 e 2.10). Ele é chamado na definição abaixo de conjunto algébrico final.

**Definição 2.7.** a) O conjunto algébrico final de  $A(\alpha)$  é o conjunto

$$E_n(\alpha) = \{(p, 0) \in \mathbb{S}^3; \alpha_n(p) = 0\}.$$

b) Um ponto final ou ponto do infinito de  $A(\alpha)$  é um ponto  $p \in \mathbb{S}^2$  tal que  $p$  é limite de uma sequência da forma  $\frac{p_m}{|p_m|}$ , onde  $p_m$  tende a infinito em  $A(\alpha)$ .

c) Uma curva do infinito ou comportamento final de  $A(\alpha)$  é o conjunto

$$E(\alpha) = \{(p, 0) \in S^3/p \text{ é ponto do infinito de } A(\alpha)\}.$$

d) A superfície algébrica  $A(\alpha)$  é regular no infinito quando 0 é valor regular de  $\alpha_n$  restrita aos pontos da esfera.

De acordo com o artigo que estamos seguindo, nem sempre  $E_n(\alpha)$  é igual ao conjunto  $E(\alpha)$ . De fato, vamos mostrar um contra-exemplo para essa afirmação. Pelo exemplo 2.8 segue que o conjunto algébrico final do parabolóide é  $E_2(\beta) = \{(0, 0, 1, 0), (0, 0, -1, 0)\}$ . O ponto  $(p, 0) \in S^2 \times \{0\}$ , onde  $p = (0, 0, -1)$  não é ponto final do parabolóide. Para mostrar isso, suponha que é, e por isso existe uma sequência  $p_m = (p_{m1}, p_{m2}, p_{m3})$  que tende a infinito em  $A(\beta)$  e  $\lim \frac{p_m}{|p_m|} = p$ . Por  $p_m$  está na superfície algébrica quando  $m$  tende a infinito segue que  $p_{m1}^2 + p_{m2}^2 = p_{m3}$ . Usando essa condição e a do limite obtemos,

$$\lim \frac{p_m}{|p_m|} = \left( \lim \frac{p_{m1}}{|p_m|}, \lim \frac{p_{m2}}{|p_m|}, \lim \frac{p_{m3}}{|p_m|} \right) = p. \quad (2.7)$$

Do limite 2.7 segue que

$$\lim \frac{p_{m3}}{|p_m|} = -1.$$

Então

$$-1 = \lim \frac{p_{m3}}{|p_m|} = \lim \frac{p_{m1}^2 + p_{m2}^2}{|p_m|} \geq 0,$$

uma contradição. Então este é um exemplo de superfície que o conjunto dos pontos finais não coincide com o algébrico final. Segundo [1], isso ocorre pois o parabolóide não é regular no infinito. Nessa classe de superfícies que falham a regularidade no infinito, o conjunto  $E_n(\alpha)$  tem pontos que não são finais. Agora, todos os pontos finais são pontos do conjunto algébrico, antes de ver esse fato enunciemos um resultado da relação: projeção com o polinômio que define a superfície.

**Proposição 2.2.** Seja  $\alpha(x, y, z) = \alpha_n(x, y, z) + \alpha_{n-1}(x, y, z) + \dots + \alpha_0(x, y, z)$  o polinômio de grau  $n$ , que define a superfície algébrica  $A(\alpha) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / \alpha(x, y, z) = 0\}$ .

Se  $\alpha^c(x, y, z, w) = \alpha_n(x, y, z) + w\alpha_{n-1}(x, y, z) + \dots + w^n\alpha_0(x, y, z)$  então  $\alpha^c \circ \Pi^+(x, y, z) = \frac{1}{\Delta^n} \alpha(x, y, z)$  e  $\alpha^c \circ \Pi^-(x, y, z) = \frac{(-1)^n}{\Delta^n} \alpha(x, y, z)$ .

*Demonstração.* Mesmos argumentos da proposição 2.1. ■

Essa relação será usada na observação seguinte:

**Observação 2.1.** I) O ponto do infinito definido no item b) da definição 2.7 é equivalente ao dado pelas projeções centrais. Isto é,  $p = \lim_{p_m \rightarrow \infty} \frac{p_m}{|p_m|}$  se e só se  $\lim_{p_m \rightarrow \infty} \Pi^+(p_m) = (p, 0)$ .

*Demonstração.* De fato, suponha que  $p = \lim_{p_m \rightarrow \infty} \frac{p_m}{|p_m|}$ . Por definição de  $\Pi^+$

$$\lim_{p_m \rightarrow \infty} \Pi^+(p_m) = \lim_{p_m \rightarrow \infty} \left( \frac{p_m}{\sqrt{|p_m|^2 + 1}}, \frac{1}{\sqrt{|p_m|^2 + 1}} \right) \quad (2.8)$$

Calculando os limites separadamente

$$\lim_{p_m \rightarrow \infty} \frac{p_m}{\sqrt{|p_m|^2 + 1}} = \lim_{p_m \rightarrow \infty} \frac{p_m}{|p_m| \sqrt{1 + \frac{1}{|p_m|^2}}} = \lim_{p_m \rightarrow \infty} \frac{p_m}{|p_m|} = p, \quad (2.9)$$

pois  $\lim_{p_m \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{|p_m|^2}}} = 1.$

Por fim,

$$\lim_{p_m \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{|p_m|^2 + 1}} = 0 \quad (2.10)$$

Substituindo (2.9) e (2.10) em (2.8) conclui-se que

$$\lim_{p_m \rightarrow \infty} \Pi^+(p_m) = (p, 0).$$

Reciprocamente, se  $\lim_{p_m \rightarrow \infty} \Pi^+(p_m) = (p, 0)$ ,

$$\begin{cases} \lim_{p_m \rightarrow \infty} \frac{p_m}{\sqrt{|p_m|^2 + 1}} = p \\ \lim_{p_m \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{|p_m|^2 + 1}} = 0 \end{cases}$$

Como a sequência  $\frac{p_m}{|p_m|}$  é limitada, passando uma subsequência se necessário, seu limite existe e, portanto

$$p = \lim_{p_m \rightarrow \infty} \frac{p_m}{\sqrt{|p_m|^2 + 1}} = \lim_{p_m \rightarrow \infty} \frac{p_m}{|p_m|} \lim_{p_m \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{|p_m|^2}}} = \lim_{p_m \rightarrow \infty} \frac{p_m}{|p_m|}.$$

■

II)  $E(\alpha) \subset E_n(\alpha).$

*Demonstração.* Seja  $(p, 0) \in E(\alpha)$  então existe  $p_m$  tendendo a infinito em  $A(\alpha)$  tal

que  $\lim_{p_m \rightarrow \infty} \frac{p_m}{|p_m|} = p$ . Por definição de  $\alpha^c$ , proposição (2.2), temos

$$\begin{aligned} \alpha_n(p) = \alpha^c(p, 0) &= \alpha^c \left( \lim_{p_m \rightarrow \infty} \Pi^+(p_m) \right) = \\ &= \lim_{p_m \rightarrow \infty} \alpha^c \circ \Pi^+(p_m) = \\ &= \lim_{p_m \rightarrow \infty} \frac{\alpha(p_m)}{(\sqrt{|p_m|^2 + 1})^n} = 0. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Então  $(p, 0) \in E_n(\alpha)$ . ■

III) Se  $A(\alpha)$  é regular no infinito então  $E_n(\alpha) \subset E(\alpha)$ .

*Demonstração.* Seja  $(p, 0)$  um ponto de  $E_n(\alpha)$ , então  $\alpha_n(p) = 0$  e pela definição de regularidade no infinito podemos definir o normal  $\eta(p) = \frac{\nabla \alpha_n(p)}{|\nabla \alpha_n(p)|}$ . Esse vetor é ortogonal ao ponto  $p$  e o que faremos nesta demonstração é definir a sequência  $p_m = p + \frac{\eta(p)}{m}$  que converge para  $p$  quando  $m$  tende a infinito e mostrar que para  $m$  suficientemente grande  $p_m$  são pontos da superfície algébrica. Começaremos observando que  $(p_m, 1)$  estão no hiperplano do  $\mathbb{R}^4$  de última coordenada igual a 1. Se usarmos a proposição 2.2 e  $\lim_{m \rightarrow \infty} \Pi^+(p_m) = (p, 0)$  obteremos que:

$$\alpha^c \left( \lim_{m \rightarrow \infty} \Pi^+(p_m) \right) = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\alpha(p_m)}{\Delta^n} = \frac{\lim_{m \rightarrow \infty} \alpha(p_m)}{2^{\frac{n}{2}}}, \quad (2.12)$$

porque  $\Delta^n = \sqrt{|p_m|^2 + 1} = \sqrt{|p|^2 + \frac{|\eta(p)|^2}{m^2} + 1} = \sqrt{2 + \frac{1}{m^2}}$  e por isso  $\lim_{m \rightarrow \infty} \Delta^n = 2^{\frac{n}{2}}$ .

De (2.12) e  $\alpha_n(p) = 0$  teremos que,

$$0 = \alpha_n(p) = \alpha^c(p, 0) = \alpha^c \left( \lim_{m \rightarrow \infty} \Pi^+(p_m) \right) = \lim_{m \rightarrow \infty} \alpha^c \circ \Pi^+(p_m) = \frac{\lim_{m \rightarrow \infty} \alpha(p_m)}{2^{\frac{n}{2}}},$$

isto é o numerador da expressão acima,  $\lim_{m \rightarrow \infty} \alpha(p_m) = \alpha \left( \lim_{m \rightarrow \infty} p_m \right)$  é nulo e isso significa que para  $m$  suficientemente grande  $p_m$  é uma sequência que tende a infinito em  $A(\alpha)$ . Como ela já convergia para  $p$ , concluímos que  $p$  é ponto final e  $(p, 0)$  pertence a  $E(\alpha)$ . ■

IV)  $A(\alpha)$  é regular no infinito se e somente se  $\nabla \alpha_n(x, y, z) \times (x, y, z) \neq (0, 0, 0)$

*Demonstração.* Por definição, 0 é valor regular de  $\alpha_n$  restrita a  $S^2$  quando  $\nabla \alpha_n(p) \neq (0, 0, 0)$  para  $p \in S^2$  e  $\alpha_n(p) = 0$ . Então a norma de  $\nabla \alpha_n(p)$  é diferente de zero. Além

disso como 0 é valor regular o conjunto  $\alpha_n^{-1}(0)$  é uma superfície regular e pela teoria definimos o plano tangente  $T_p\alpha_n^{-1}(0)$  passando por  $p$ , cujo vetor normal a este plano é  $\eta(p) = \frac{\nabla\alpha_n(p)}{|\nabla\alpha_n(p)|}$ . Conforme a construção o vetor  $p$  é ortogonal a  $\nabla\alpha_n(p)$ , múltiplo do normal ao plano tangente, então eles não são múltiplos e  $\nabla\alpha_n(p) \times p \neq (0, 0, 0)$ .

Para a recíproca se  $\nabla\alpha_n(p) = 0$  então  $\nabla\alpha_n(p) \times p = (0, 0, 0)$ . Pela contrapositiva dessa última afirmação se  $\nabla\alpha_n(p) \times p \neq (0, 0, 0)$  então  $\nabla\alpha_n(p) \neq 0$ , como queríamos. ■

A observação 2.1 mostrou a relação do conjunto algébrico final com o dos pontos finais. Sabemos que quando uma superfície  $A(\alpha)$  não é regular no infinito essa igualdade não é válida. Agora, quando ela é válida segue que  $E(\alpha) = E_n(\alpha) \neq \emptyset$  e o conjunto  $E_n(\alpha)$  é uma coleção de curvas regulares fechadas  $\{\gamma_i, i = 1, \dots, l\}$ , onde  $l$  é o número de componentes conexas deste conjunto. Esta coleção de curvas são invariantes pelo mapa antipodal  $a(p) = -p$  da esfera. Basta verificar que se  $\gamma_i$  é uma curva de  $E_n(\alpha)$  segue que  $a(\gamma_i)$  também está neste conjunto. Isso acontece porque sendo  $\alpha_n$  um polinômio homogêneo segue-se que  $\alpha_n(a(\gamma_i)) = \alpha_n(-\gamma_i) = (-1)^n \alpha_n(\gamma_i) = 0$ .

A invariância implica que: dada uma curva  $\gamma_i$  de um conjunto algébrico final ela pode coincidir ou não com a imagem de  $a(\gamma_i)$ . Disso, temos que existem apenas dois tipos de curvas.

**Definição 2.8.** Sejam  $A(\alpha)$  uma superfície algébrica de grau  $n$  com  $E(\alpha) = E_n(\alpha) = \{\gamma_i, i = 1, \dots, l\}$ , quando  $a(\gamma_i) = \gamma_i$ , a curva é chamada de ímpar. Caso  $a(\gamma_i) = \gamma_j$  (para  $i \neq j$ ) ela é par.

Usaremos essa definição no capítulo 3. O próximo resultado é o teorema 2.1 para o caso de compactificação de superfícies algébricas.

**Teorema 2.2.** Sejam  $A(\alpha)$  uma superfície algébrica de grau  $n$ , com  $\alpha = \alpha_n + \dots + \alpha_0$  então

$$A(\alpha^c) \cap \mathbb{S}^3 = \Pi^+(A(\alpha)) \cup E_n(\alpha) \cup \Pi^-(A(\alpha)).$$

*Demonstração.* Mesmos argumentos da demonstração do teorema 2.1 ■

A compactificação de superfícies algébricas acaba compactificando também as linhas de curvatura, no próximo exemplo exibimos uma forma de compactificar as linhas de curvatura das superfícies que são definidas pelo gráfico de uma função diferenciável  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , encontrada em [8].

**Exemplo 2.11.** Compactifique as linhas de curvatura do parabolóide  $A(\alpha) = \{(x, y, z)/x^2 + y^2 = z\}$  usando a definição de compactificação de curvas algébricas.

*Solução.* Considere a carta  $\varphi(u, v) = (u, v, u^2 + v^2)$  de  $A(\alpha)$ , então nessa carta a equação diferencial das linhas de curvatura é

$$u(t)v(t)(v'(t))^2 + (u(t)^2 - v(t)^2)u'(t)v'(t) - u(t)v(t)(u'(t))^2 = 0.$$

Assim,  $\varphi_1(t) = (\rho \cos(t), \rho \sin(t))$  e  $\varphi_2(t) = \left(\frac{2\sqrt{2}\rho}{\pi}t, \frac{2\sqrt{2}\rho}{\pi}t\right)$  onde  $\rho$  é uma constante estritamente positiva, são soluções da equação diferencial das linhas de curvatura e estão representadas no plano  $xy$  da figura 2.12 respectivamente pelas cores, preto e laranja. Se  $\pi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  é a projeção definida por  $\pi(x, y, z) = (x, y)$ , existe uma relação de  $\pi$  com a carta do paraboloide. De fato, restringindo  $\pi$  a  $A(\alpha)$  segue as relações

$$\varphi \circ \pi(x, y, z) = \varphi(x, y) = (x, y, x^2 + y^2) = (x, y, z),$$

$$\pi \circ \varphi(x, y) = \pi(x, y, x^2 + y^2) = (x, y).$$

então a restrição da projeção ao subconjunto é a inversa da carta. Desse modo podemos usar a definição de compactificação de curvas algébricas. Como já vimos considere os difeomorfismos  $\Pi^+ : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{H}^+$ ,  $\Pi^- : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{H}^-$ , definidos por

$$\begin{aligned} \Pi^+(x, y) &= \left( \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1}}, \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1}} \right), \\ \Pi^-(x, y) &= \left( \frac{-x}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1}}, \frac{-y}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1}}, \frac{-1}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1}} \right). \end{aligned}$$

Portanto, a compactificação de  $\varphi_1$  e  $\varphi_2$  são suas respectivas imagens por  $\Pi^+$  e  $\Pi^-$  e os pontos finais na esfera. Compactificação de  $\varphi_1$ :  $A_1 = \Pi^+(\varphi_1(t)) \cup \Pi^-(\varphi_1(t)) \cup \{(p, 0) \in \mathbb{S}^2/p \text{ é ponto final}\}$ , mais detalhadamente:

$$\left\{ \left( \frac{\rho \cos(t)}{\sqrt{1 + \rho^2}}, \frac{\rho \sin(t)}{\sqrt{1 + \rho^2}}, \frac{1}{\sqrt{1 + \rho^2}} \right) \right\} \cup \left\{ \left( \frac{-\rho \cos(t)}{\sqrt{1 + \rho^2}}, \frac{-\rho \sin(t)}{\sqrt{1 + \rho^2}}, \frac{-1}{\sqrt{1 + \rho^2}} \right) \right\}. \quad (2.13)$$

A compactificação de  $\varphi_2$  é a união dos três seguintes conjuntos

$$\Pi^+(\varphi_2(t)) = \left\{ \left( \frac{2\sqrt{2}\rho t}{\sqrt{\pi^2 + 16t^2\rho^2}}, \frac{2\sqrt{2}\rho t}{\sqrt{\pi^2 + 16t^2\rho^2}}, \frac{1}{\sqrt{\pi^2 + 16t^2\rho^2}} \right) \right\},$$

$$\Pi^-(\varphi_2(t)) = \left\{ \left( \frac{-2\sqrt{2}\rho t}{\sqrt{\pi^2 + 16t^2\rho^2}}, \frac{-2\sqrt{2}\rho t}{\sqrt{\pi^2 + 16t^2\rho^2}}, \frac{-1}{\sqrt{\pi^2 + 16t^2\rho^2}} \right) \right\},$$



$$\left\{ \left( \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0 \right), \left( \frac{-\sqrt{2}}{2}, \frac{-\sqrt{2}}{2}, 0 \right) \right\}.$$

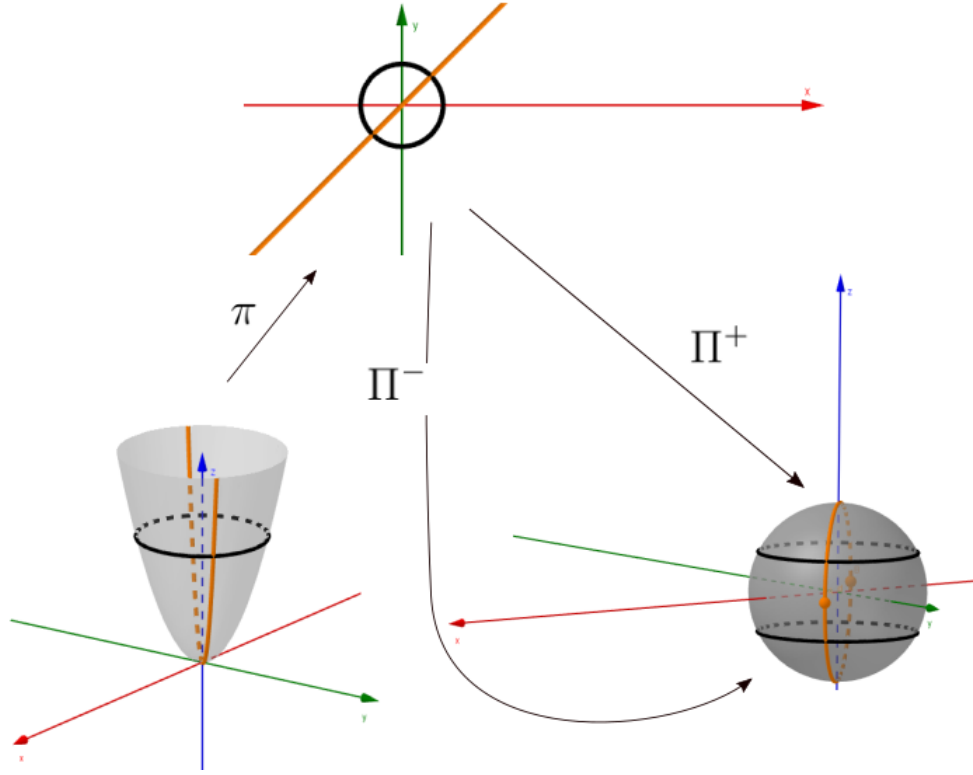


Figura 2.12: Esquema de compactificação das linhas de curvatura do parabolóide. As curvas de mesmas cores no parabolóide, plano e na esfera são as mesmas a menos dos difeomorfismos  $\pi$ ,  $\Pi^+$  e  $\Pi^-$ .

■

Essa forma de compactificar linhas de curvatura é utilizada para todas as superfícies algébricas descritas pelo gráfico de uma função diferenciável  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ . De fato, a aplicação  $\pi$  restrita ao gráfico de  $f$  é sempre a inversa da carta  $\varphi(x, y) = (x, y, f(x, y))$ .

**Exemplo 2.12.** Seja  $\eta(u, v) = (u, v, \sqrt{1 - v^2})$  a carta da superfície  $A(\alpha) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / y^2 + z^2 = 1, z > 0\}$ . Então as soluções da equação diferencial das linhas de curvatura são as curvas coordenadas desta superfície. Na figura 2.13 estão descritas, no plano  $xy$  uma par de folheações  $\eta_1(t) = (t, 1)$ , de amarelo,  $\eta_2(t) = (1, t)$ , de preto. As de mesmas cores no cilindro e na esfera são suas imagens pelos difeomorfismos. A expressão da compactificação da curva  $\eta_1$  é

$$\left\{ \left( \frac{t}{\sqrt{2+t^2}}, \frac{1}{\sqrt{2+t^2}}, \frac{1}{\sqrt{2+t^2}} \right) \right\} \cup \left\{ \left( \frac{-t}{\sqrt{2+t^2}}, \frac{-1}{\sqrt{2+t^2}}, \frac{-1}{\sqrt{2+t^2}} \right) \right\} \cup \{(1, 0, 0), (-1, 0, 0)\},$$

e da curva  $\eta_2$  é

$$\left\{ \left( \frac{1}{\sqrt{2+t^2}}, \frac{t}{\sqrt{2+t^2}}, \frac{1}{\sqrt{2+t^2}} \right) \right\} \cup \left\{ \left( \frac{-1}{\sqrt{2+t^2}}, \frac{-t}{\sqrt{2+t^2}}, \frac{-1}{\sqrt{2+t^2}} \right) \right\} \cup \{(0, 1, 0), (0, -1, 0)\}.$$

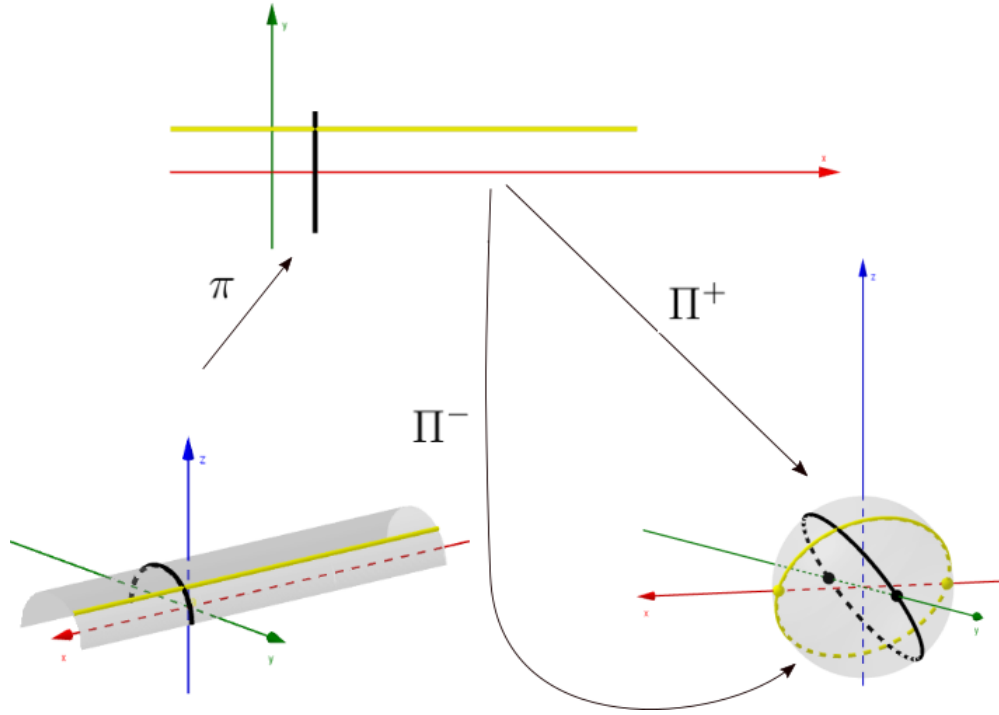


Figura 2.13: Esquema de compactificação das linhas de curvatura. As curvas de mesmas cores no plano e na esfera são as mesmas a menos dos difeomorfismos  $\pi$ ,  $\Pi^+$  e  $\Pi^-$ .

A compactificação das superfícies algébricas compactifica naturalmente as linhas principais máxima e mínima de uma superfície: sabendo quem são as linhas de curvatura, basta achar a imagem pelas projeções centrais. No próximo exemplo, faremos isso com o parabolóide.

**Exemplo 2.13.** Seja  $\varphi(u, v) = (u \cos(v), u \sin(v), u^2)$  a carta do parabolóide usada no exemplo 2.1. Então o par de folheações principais é formado por

$$\begin{aligned} F_1(\alpha) &= (c_1 \cos(c_2 t), c_1 \sin(c_2 t), c_1^2), \\ F_2(\alpha) &= (c_1 t \cos(c_2), c_1 t \sin(c_2), c_1^2 t^2), \end{aligned}$$

e o único ponto umbílico é  $(0, 0, 0)$ . Pela correspondência dos difeomorfismos os corres-

pondentes das folheações e ponto umbílico na compactificação são, respectivamente

$$\begin{aligned}
\Pi^+ F_1(\alpha) &= \left( \frac{c_1 \cos(c_2 t)}{\sqrt{c_1^2 + c_1^4 + 1}}, \frac{c_1 \sin(c_2 t)}{\sqrt{c_1^2 + c_1^4 + 1}}, \frac{c_1^2}{\sqrt{c_1^2 + c_1^4 + 1}}, \frac{1}{\sqrt{c_1^2 + c_1^4 + 1}} \right), \\
\Pi^- F_1(\alpha) &= \left( \frac{-c_1 \cos(c_2 t)}{\sqrt{c_1^2 + c_1^4 + 1}}, \frac{-c_1 \sin(c_2 t)}{\sqrt{c_1^2 + c_1^4 + 1}}, \frac{-c_1^2}{\sqrt{c_1^2 + c_1^4 + 1}}, \frac{-1}{\sqrt{c_1^2 + c_1^4 + 1}} \right), \\
\Pi^+ F_2(\alpha) &= \left( \frac{c_1 t \cos(c_2)}{\Delta}, \frac{c_1 t \sin(c_2)}{\Delta}, \frac{(c_1 t)^2}{\Delta}, \frac{1}{\Delta} \right), \\
\Pi^- F_2(\alpha) &= \left( \frac{-c_1 t \cos(c_2)}{\Delta}, \frac{-c_1 t \sin(c_2)}{\Delta}, \frac{-(c_1 t)^2}{\Delta}, \frac{-1}{\Delta} \right), \\
\Pi^+(0, 0, 0) &= (0, 0, 0, 1), \\
\Pi^-(0, 0, 0) &= (0, 0, 0, -1),
\end{aligned}$$

onde  $\Delta = \sqrt{(c_1 t)^2 + (c_1 t)^4 + 1}$ . A compactificação de  $F_1(\alpha)$  é a união dos conjuntos  $\Pi^+ F_1(\alpha)$  e  $\Pi^- F_1(\alpha)$ . O conjunto que define a folheação  $F_2(\alpha)$  não é limitado e tende a infinito quando  $t \rightarrow \pm\infty$ , por isso sua compactificação é  $\Pi^+ F_2(\alpha) \cup \Pi^- F_2(\alpha) \cup \{(0, 0, 1, 0), (0, 0, -1, 0)\}$ , pois

$$\begin{aligned}
\lim_{u \rightarrow \pm\infty} \Pi^+ F_2(\alpha) &= (0, 0, 1, 0), \\
\lim_{u \rightarrow \pm\infty} \Pi^- F_2(\alpha) &= (0, 0, -1, 0).
\end{aligned}$$

Até o momento as seções trouxeram fatos da técnica da compactificação que foi feita primeiramente de curvas, pelo recurso dos desenhos, para que no próximo capítulo possamos usar esta técnica para estudar as superfícies algébricas não compactas, seguindo o artigo [1].

## Capítulo 3

# Estabilidade de Superfície Algébrica

Neste capítulo iremos estudar a estabilidade estrutural de uma classe de superfícies  $S$  e de suas redes principais (linhas de curvatura de  $S$ ) sob pequenas perturbações. Esse estudo foi iniciado pelas superfícies orientadas e compactas, por Gutierrez e Sotomayor em [10], [14] e [15]. De início, iremos estabelecer noções preliminares, elencar e demonstrar alguns resultados de estabilidade próximos aos pontos finais regulares: birregulares e de inflexão bitransversal. Nas seções 3.2 e 3.3, trata os pontos umbílicos e ciclos limites do infinito.

A seção 3.4, contém os resultados de Sotomayor e Garcia na qual estabelecem a caracterização de superfícies algébricas, orientáveis e não-compacta, estruturalmente estáveis. Quando a superfície é compacta e orientável, este resultado coincide com o de Gutierrez e Sotomayor. Este teorema afirma que as superfícies algébricas estruturalmente estáveis são caracterizadas por serem regulares no infinito, terem somente pontos umbílicos Darbouxianos, os de inflexão final serem bitransversais, os ciclos principais serem hiperbólicos, nenhuma conexão de separatrizes umbílicas e o conjunto limite de todas as linhas de curvatura sendo ciclos principais (finito ou infinito), um ponto umbílico ou um ponto final.

### 3.1 Estabilidade próximo aos Pontos Finais regulares

Considere  $\alpha$  um polinômio de grau  $n$ , escrito na forma da definição 2.1, que define a superfície algébrica  $A(\alpha)$ . Sua compactificação é o conjunto  $A^c(\alpha) = A(\alpha) \cap \mathbb{S}^3$ , que é a união das imagens das projeções da superfície algébrica com o conjunto algébrico final, como visto no teorema 2.2. O que será demonstrado na próxima proposição é a existência de uma carta local  $\xi : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow A(\alpha)$  obtida a partir de  $A^c(\alpha)$ .

A compactificação  $A^c(\alpha) = \Pi^+(A(\alpha)) \cup E_n(\alpha) \cup \Pi^-(A(\alpha))$  também é vista como a união desses três conjuntos e será coberta por uma carta local na vizinhança de uma curva regular final de  $E_n(\alpha)$  da seguinte forma: escolha uma parametrização regular  $\gamma_0(s)$  desse conjunto algébrico com  $\gamma_0(0) = p$  e  $s$  o parâmetro da curva. Nesse caso,  $p$  é ponto regular

do infinito e então podemos definir o normal por  $\eta(s) = \frac{\nabla \alpha_n(\gamma_0(s))}{|\nabla \alpha_n(\gamma_0(s))|}$ ,  $\eta(s) \in \mathbb{R}^3$ . Em seguida defina  $\gamma(s, r) = [1 + ra(s, r)]\gamma_0(s) + rb(s, r)\eta(s)$  de modo que  $\alpha^c(\gamma(s, r), r) = 0$  e norma de  $\gamma(s, r)$  seja 1, para  $r$  suficientemente pequeno. Abrindo a conta  $|\gamma(s, r)| = 1$ , as funções  $a(s, r)$  e  $b(s, r)$  devem satisfazer a equação  $ra(s, r)^2 + 2a(s, r) + rb(s, r)^2 = 0$ . Assim existe um aberto  $U$  tal que  $\varphi : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow A^c(\alpha)$  dada por  $\varphi(s, r) = (\gamma(s, r), r)$  é uma carta local de  $A^c(\alpha)$  na vizinhança de  $p$ .

Observe que uma carta local de  $A(\alpha)$  é  $\xi(s, r) = r\gamma(s, r)$ . Para ver que ela cobre essa superfície basta definir  $J(x, y, z, 1) = (r^2x, r^2y, r^2z, 1)$  (para  $r$  um número real diferente de zero), diferenciável cuja inversa é  $J^{-1}(x, y, z, 1) = \left(\frac{x}{r^2}, \frac{y}{r^2}, \frac{z}{r^2}, 1\right)$  e verificar, pelas definições dos difeomorfismos  $g, J, \Pi^\pm$  (veja definição deles na seção 2.3), que

$$g^{-1} \circ J^{-1} \circ (\Pi^\pm)^{-1} \circ \varphi(s, r) = g^{-1} \circ J^{-1} \circ (\Pi^\pm)^{-1}(\gamma(s, r), r) = r\gamma(s, r) = \xi(s, r),$$

essa igualdade nos indica que a relação entre as cartas é o ilustrado na figura 3.1.

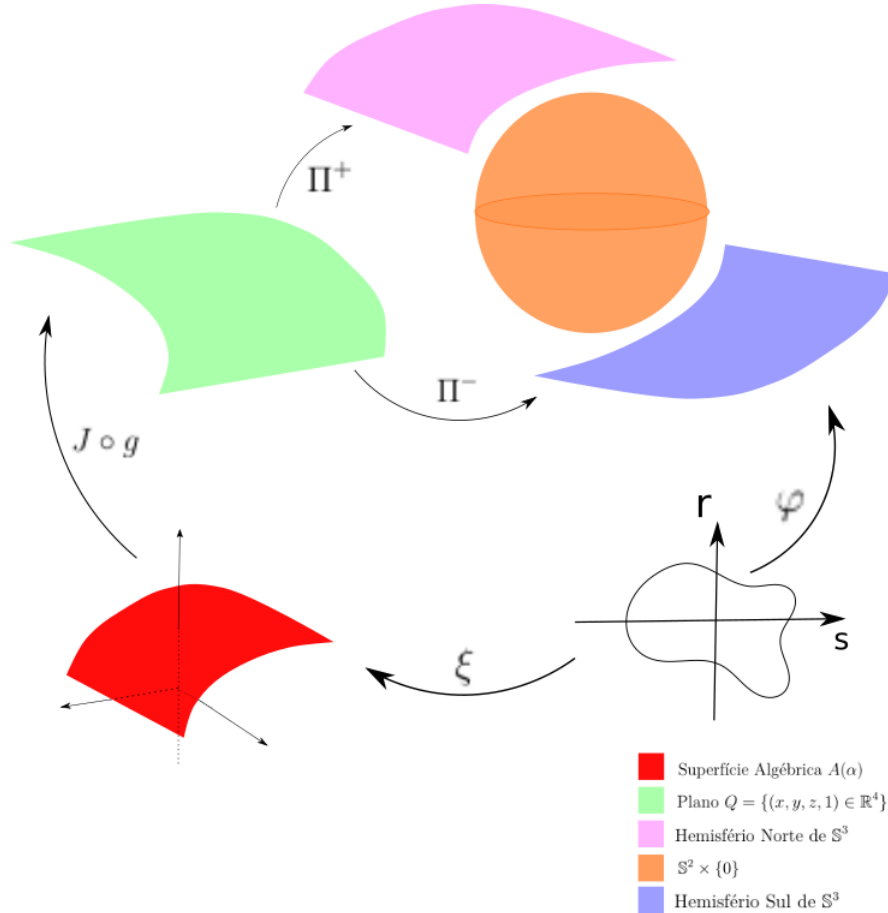


Figura 3.1: Ilustração indica os domínios dos difeomorfismos

Nas condições acima,  $\xi(s, r) = r\gamma(s, r)$  é carta local de  $A(\alpha)$ , e como as linhas de curvatura são invariantes por difeomorfismos as folheações da compactificação na vizinhança do infinito ( $r \neq 0$ ) podem ser obtidas integrando a equação diferencial das linhas

de curvatura da carta local  $\xi$  vista na proposição anterior.

**Lema 3.1.** A equação diferencial das linhas de curvatura na carta  $\xi(s, r) = r\gamma(s, r)$ , multiplicada por  $\frac{|\xi_s \times \xi_r|}{r^2}$  é dada por

$$L(s, r)dr^2 + M(s, r)drds + N(s, r)ds^2 = 0,$$

onde,

$$\begin{aligned} L(s, r) &= -[\gamma_{sr}, \gamma_s, \gamma] + r(2\langle \gamma_s, \gamma_r \rangle [\gamma_s, \gamma, \gamma_r] - [\gamma_{sr}, \gamma_s, \gamma_r]) + O(r^2), \\ M(s, r) &= -[\gamma_{ss}, \gamma_s, \gamma] + r(2\langle \gamma_s, \gamma_s \rangle [\gamma_s, \gamma, \gamma_r] - [\gamma_{ss}, \gamma_s, \gamma_r]) + O(r^2), \\ N(s, r) &= r^2(\langle \gamma_s, \gamma_s \rangle [\gamma_{sr}, \gamma_s, \gamma_r] - \langle \gamma_s, \gamma_r \rangle [\gamma_{ss}, \gamma_s, \gamma]) + O(r^3). \end{aligned} \quad (3.1)$$

*Demonstração.* Por definição na carta local  $\xi$  os coeficientes da primeira e segunda forma fundamental são:

$$\begin{aligned} E(s, r) &= \langle \xi_s, \xi_s \rangle = r^2 \langle \gamma_s, \gamma_s \rangle, \\ F(s, r) &= \langle \xi_s, \xi_r \rangle = r \langle \gamma_s, \gamma_s \rangle + r^2 \langle \gamma_s, \gamma_r \rangle, \\ G(s, r) &= \langle \xi_r, \xi_r \rangle = 1 + 2r \langle \gamma_s, \gamma_r \rangle + r^2 \langle \gamma_r, \gamma_r \rangle, \\ e(s, r) &= \left\langle \xi_{ss}, \frac{\xi_s \times \xi_r}{|\xi_s \times \xi_r|} \right\rangle = \frac{[\xi_{ss}, \xi_s, \xi_r]}{|\xi_s \times \xi_r|} = r^2 [\gamma_{ss}, \gamma_s, \gamma] + r^3 [\gamma_{ss}, \gamma_s, \gamma_r], \\ f(s, r) &= \frac{[\xi_{sr}, \xi_s, \xi_r]}{|\xi_s \times \xi_r|} = r^2 [\gamma_{sr}, \gamma_s, \gamma] + r^3 [\gamma_{sr}, \gamma_s, \gamma_r], \\ g(s, r) &= \frac{[\xi_{rr}, \xi_s, \xi_r]}{|\xi_s \times \xi_r|} = 2r [\gamma_s, \gamma, \gamma_r] + r^2 [\gamma_{rr}, \gamma, \gamma_r] + r^3 [\gamma_{rr}, \gamma_s, \gamma_r]. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} \frac{|\xi_s \times \xi_r|(Fg - fG)(s, r)}{r^2} &= -[\gamma_{sr}, \gamma_s, \gamma] + r(2\langle \gamma_s, \gamma_r \rangle [\gamma_s, \gamma, \gamma_r] - [\gamma_{sr}, \gamma_s, \gamma_r]) + O(r^2), \\ \frac{|\xi_s \times \xi_r|(Eg - eG)(s, r)}{r^2} &= -[\gamma_{ss}, \gamma_s, \gamma] + r(2\langle \gamma_s, \gamma_s \rangle [\gamma_s, \gamma, \gamma_r] - [\gamma_{ss}, \gamma_s, \gamma_r]) + O(r^2), \\ \frac{|\xi_s \times \xi_r|(Eg - eG)(s, r)}{r^2} &= r^2(\langle \gamma_s, \gamma_s \rangle [\gamma_{sr}, \gamma_s, \gamma_r] - \langle \gamma_s, \gamma_r \rangle [\gamma_{ss}, \gamma_s, \gamma]) + O(r^3). \end{aligned}$$

e os coeficientes da equação diferencial das linhas de curvatura são

$$\begin{aligned} L(s, r) &= -[\gamma_{sr}, \gamma_s, \gamma] + O(r), \\ M(s, r) &= -[\gamma_{ss}, \gamma_s, \gamma] + O(r), \\ N(s, r) &= r^2(\langle \gamma_s, \gamma_s \rangle [\gamma_{sr}, \gamma_s, \gamma_r] - \langle \gamma_s, \gamma_r \rangle [\gamma_{ss}, \gamma_s, \gamma]) + O(r^3), \end{aligned}$$

■

A próxima proposição usa este lema e mostra uma expressão para a curvatura geodésica em função de  $\gamma$ .

**Proposição 3.1.** Os coeficientes da equação diferencial do lema 3.1 restrita a parametrização  $r = 0$ , que corresponde a curva final, são

$$L(s, 0) = \nu(s), \quad (3.2)$$

$$M(s, 0) = k_g(s), \quad (3.3)$$

$$N(s, 0) = 0, \quad (3.4)$$

onde  $\nu(s) = -[\gamma_{sr}, \gamma_s, \gamma](s, 0)$  e  $k_g$  é a curvatura geodésica de  $\gamma(s, 0) = \gamma_0(s)$ .

*Demonstração.* Da proposição anterior, basta mostrar que a curvatura geodésica da curva  $\gamma$  é  $-[\gamma_{ss}, \gamma_s, \gamma]$ . Considere a base  $\{\gamma, \gamma_s, \gamma \times \gamma_s\}$  ortonormal de  $\mathbb{R}^3$ , então.

$$\gamma_{ss} = a\gamma + b\gamma_s + c\gamma \times \gamma_s. \quad (3.5)$$

Por definição a curvatura geodésica  $k_g(s) = c$ . Logo,  $k_g(s) = -[\gamma_{ss}, \gamma_s, \gamma]$ .

■

Defina  $H(s, r, p) = L(s, r)p^2 + M(s, r)p + N(s, r) = 0$ , onde  $p = \frac{dr}{ds}$ , então segue que o discriminante de  $H$  quando  $r = 0$  é  $\Delta = (M(s, 0))^2 - 4L(s, 0)N(s, 0) = (k_g(s))^2$ . Dessa forma quando a curvatura geodésica é diferente de zero, a solução é um par de folheações principais do infinito. Caso contrário, obtém-se um ponto singular (infinito) da folheação. A próxima definição dará nomes sugestivos para cada um desses casos.

**Definição 3.1.** (i) Um ponto final regular é chamado de **ordinário ou birregular** se a curvatura geodésica,  $k_g$ , da curva final em  $p$  é não nula. Caso contrário, este ponto, é chamado de **ponto de inflexão final**.

(ii) Um **ponto de inflexão final**  $(s, r, p)$  é chamado de bitransversal se  $\nu(s)$  e a derivada da curvatura geodésica forem ambas diferentes de zero.

- (iii) Um ponto bitransversal  $(s, r, p)$  é chamado de **elíptico** se  $k'_g(s)\nu(s)$  for positivo. Caso contrário é **hiperbólico**.
- iv) Uma curva final é **ciclo principal do infinito** quando todos os pontos finais são birregulares. Um ciclo cujo mapa de Poincaré,  $\pi$ , tem primeira derivada 1 é dito **semi-hiperbólico** se a segunda derivada for não nula.

### 3.1.1 Singularidades do campo de Lie-Cartan

Seja

$$H(s, r, p) = L(s, r)p^2 + M(s, r)p + N(s, r) = 0, \text{ onde } p = \frac{dr}{ds} \quad (3.6)$$

onde as funções  $L(s, r)$ ,  $M(s, r)$  e  $N(s, r)$  (calculadas no lema 3.1 e proposição 3.1) são dadas por

$$\begin{aligned} L(s, r) &= \nu(s) + r(2\langle\gamma_s, \gamma_r\rangle[\gamma_s, \gamma, \gamma_r] - [\gamma_{sr}, \gamma_s, \gamma_r]) + O(r^2), \\ M(s, r) &= k_g(s) + r(2\langle\gamma_s, \gamma_s\rangle[\gamma_s, \gamma, \gamma_r] - [\gamma_{ss}, \gamma_s, \gamma_r]) + O(r^2), \\ N(s, r) &= r^2(\langle\gamma_s, \gamma_s\rangle[\gamma_{sr}, \gamma_s, \gamma_r] - \langle\gamma_s, \gamma_r\rangle[\gamma_{ss}, \gamma_s, \gamma_r]) + O(r^3). \end{aligned} \quad (3.7)$$

Defina o campo de Lie-Cartan  $X_H(s, r, p) = (H_p, pH_p, -H_s - pH_r)$  de  $H(s, r, p) = L(s, r)p^2 + M(s, r)p + N(s, r)$ . Esse campo é tangente a superfície  $H^{-1}(0)$  e as curvas integrais deste campo se projetam nas soluções da equação diferencial implícita  $H(s, r, p) = 0$ . Vamos procurar as singularidades de  $X_H$  quando  $s = r = 0$ . Pelo cálculo direto das derivadas tem-se

$$\begin{aligned} L(0, 0) &= \nu(0), \\ L_s(0, 0) &= \nu'(0), \\ L_r(0, 0) &= (2\langle\gamma_s, \gamma_r\rangle[\gamma_s, \gamma, \gamma_r] - [\gamma_{sr}, \gamma_s, \gamma_r])|_{s=r=0}, \\ M(0, 0) &= \nu'(0), \end{aligned} \quad (3.8)$$

$$\begin{aligned} M_s(0, 0) &= k'_g(0), \\ M_r(0, 0) &= (2\langle\gamma_s, \gamma_s\rangle[\gamma_s, \gamma, \gamma_r] - [\gamma_{ss}, \gamma_s, \gamma_r])|_{s=r=0}, \\ N(0, 0) &= 0, \\ N_s(0, 0) &= 0, \\ N_r(0, 0) &= 0, \end{aligned} \quad (3.9)$$



onde  $\gamma(s, r) = [1 + ra(s, r)]\gamma_0(s) + rb(s, r)\eta(s)$  e as funções  $a(s, r)$  e  $b(s, r)$  satisfazem  $ra(s, r)^2 + 2a(s, r) + rb(s, r)^2 = 0$ . Desse modo, as derivadas de  $H$  são:

$$\begin{aligned} H_s(0, 0, p) &= L_s(0, 0)p^2 + M_s(0, 0)p + N_r(0, 0) = \\ &= \nu'(0)p^2 + k'_g(0)p, \\ H_r(0, 0, p) &= L_r(0, 0)p^2 + M_r(0, 0)p + N_r(0, 0) = \\ &= L_r(0, 0)p^2 + M_r(0, 0)p, \\ H_p(0, 0, p) &= 2L(0, 0)p + M(0, 0) = \\ &= 2\nu(0)p + k_g(0), \end{aligned} \tag{3.10}$$

e as singularidades do campo  $X_H$  são os  $(0, 0, p)$  tais que

$$H_p(0, 0, p) = 2\nu(0)p + k_g(0) = 0, \tag{3.11}$$

$$H_s(0, 0, p) - pH_r(0, 0, p) = -p(L_r(0, 0)p^2 + (M_r(0, 0) + \nu'(0))p + k'_g(0)) = 0 \tag{3.12}$$

Vamos analisar as singularidades de  $X_H$  em duas situações:  $\gamma_0(0) = q$  é ponto final de inflexão bitransversal ou quando  $\gamma_0(0) = q$  é birregular.

Suponha que  $\gamma_0(0) = q$  é ponto final de inflexão bitransversal então por sua definição teremos que  $\nu(0) \neq 0$  e  $k_g(0) = 0$ . Essas duas últimas condições implicam que  $p = 0$  é a única solução da equação (3.11), como  $p = 0$  também anula (3.12) segue que nesses pontos a única singularidade do campo de Lie-Cartan é a origem  $(0, 0, 0)$ .

Agora, suponha que  $\gamma_0(0) = q$  é ponto final birregular então por sua definição segue que  $k_g(0) \neq 0$ . Essa condição implica que se  $\nu(0) = 0$  não existe  $p$  que seja raiz a equação (3.11), e portanto o campo  $X_H$  não possui singularidade. No caso de  $\nu(0) \neq 0$  o ponto  $p = \frac{-k_g(0)}{\nu(0)}$  é raiz de (3.11). Para ser singularidade precisaríamos que  $H_s\left(0, 0, \frac{-k_g(0)}{\nu(0)}\right) - pH_r\left(0, 0, \frac{-k_g(0)}{\nu(0)}\right)$  se anulasse, mas como isso não acontece e então  $X_H$  não possui singularidade.

Portanto, sabemos que as singularidades do campo de Lie-Cartan nos casos de ponto de inflexão bitransversal vai ser a origem e para determinar o comportamento das linhas de curvatura na vizinhança desse ponto analisaremos o campo  $X_H$  na vizinhança de  $(0, 0, 0)$  (proposição 3.3). No caso dos pontos birregulares não tem ponto singular e usaremos o teorema do fluxo tubular. A próxima proposição conclui quando a origem é uma singularidade não degenerada de morse de  $H$ .

**Proposição 3.2.** Seja  $A(\alpha)$  uma superfície algébrica com um ponto de inflexão final  $q$

em  $s = 0$  onde  $s$  é o parâmetro da  $\gamma_0$  da curva final e

$$H(s, r, p) = L(s, r)p^2 + M(s, r)p + N(s, r), \quad (3.13)$$

onde  $p = \frac{dr}{ds}$  e  $L(s, r), M(s, r), N(s, r)$  são funções analíticas da equação diferencial das linhas de curvatura na parametrização  $\xi(s, r) = r\gamma(s, r)$ . O ponto  $(0, 0, 0)$  é uma singularidade não degenerada de Morse de  $H$  se e somente se  $q$  é ponto de inflexão bitransversal de  $A(\alpha)$ .

*Demonstração.* A Hessiana de  $H$  na origem é

$$HessH(0, 0, 0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & k'_g(0) \\ 0 & -\nu(0) & M_r(0, 0) \\ k'_g(0) & M_r(0, 0) & 2\nu(0, 0) \end{bmatrix},$$

e o determinante da hessiana é  $(k'_g(0))^2\nu(0)$ . Como  $\nabla H(0, 0, 0) = (N_s(0, 0), N_r(0, 0), M(0, 0)) = (0, 0, k_g(0))$  e por hipótese  $s = 0$  é ponto de inflexão, a curvatura geodésica se anula, e por isso a origem é um ponto crítico de  $H$ . Concluí-se então, pela definição 4.1, que  $(0, 0, 0)$  é ponto não degenerado de Morse se e somente se  $k'_g(0)\nu(0)$  for não nulo. Isto é,  $0$  é ponto de inflexão bitransversal da superfície algébrica. ■

A proposição acima foi feita para um ponto de inflexão na origem, no entanto ela também vale se o mesmo ocorrer quando  $s = s_0 \neq 0$ . Fizemos na origem porque lá na construção da carta local  $\xi$  escolhemos  $\gamma_0$  (parametrização da curva final) de modo que passaria pelo ponto final  $q$  no parâmetro  $s = 0$ . Assim a proposição acima diz:  $q$  (ou  $s = 0$ ) é ponto regular final de inflexão bitransversal se e somente se  $(0, 0, 0)$  é ponto crítico não degenerado de  $H$ , e pelo lema de Morse (4.1) existem vizinhanças  $V$  e  $W$  de  $0$  em  $\mathbb{R}^3$  e um difeomorfismo  $\phi : V \rightarrow W$  tal que para todo  $(s, r, p) \in V$  têm-se que

$$H(\phi(s, r, p)) = 2k'_g(0)sp - \nu(0)r^2 + 2M_r(0, 0)rp + 2\nu(0)p^2,$$

ou seja, na vizinhança da origem a superfície  $H^{-1}(0)$  é o cone (Figura 3.1.1).

**Proposição 3.3.** Seja  $\alpha$  um polinômio de grau  $n \geq 2$ ,  $q$  um ponto regular final com  $\gamma(0, 0) = \gamma_0(0) = q$  e  $\gamma_0$  parametrização de  $E(\alpha)$  então

- i) Nos pontos finais birregulares, isto é  $k_g(s) \neq 0$ , as redes principais estão ilustradas na figura 3.3(a).
- ii) Nos pontos bitransversais as redes são ilustradas na figura 3.4(c), caso hiperbólico e na figura 3.4(d) o caso elíptico.
- iii) Na vizinhança de um ciclo principal do infinito  $\gamma$ , a carta  $\xi$  é válida numa vizinhança anular de  $\gamma$  e a equação diferencial é periódica de período igual ao comprimento de

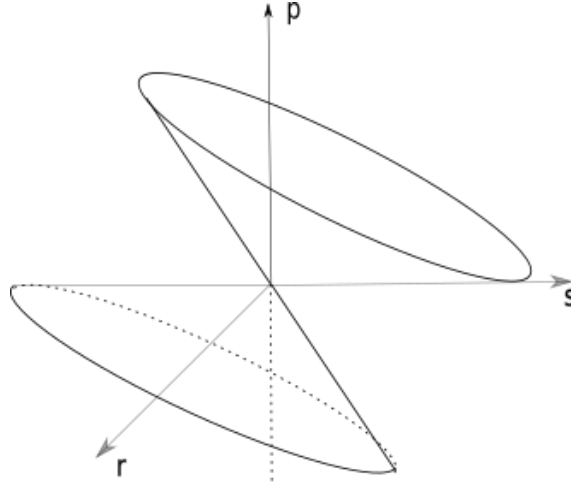
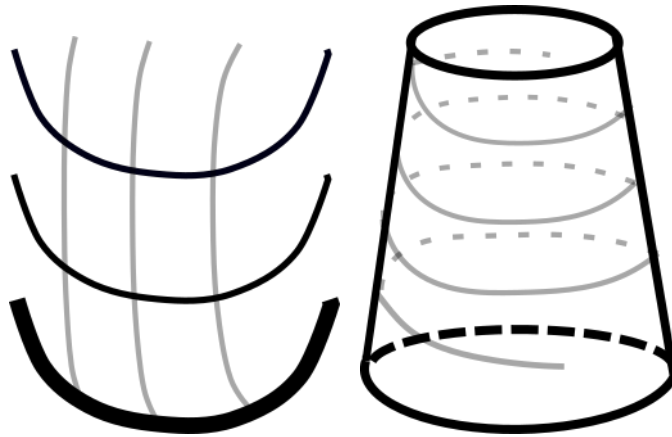


Figura 3.2: Ilustração de  $H^{-1}(0)$  nos pontos bitransversais

arco,  $L$ , da  $\gamma$  em  $s$ . Nesse caso, a primeira derivada do mapa de Poincaré associado a  $\gamma$  é sempre 1 e a segunda derivada é igual a  $-2 \int_0^L \frac{\nu'(s)}{k_g(s)} ds$ . As redes principais estão ilustradas na Figura 3.3(b).

*Demonstração.* Seja  $X_H(s, r, p) = (H_p, pH_p, -H_s - pH_r)$  o campo de Lie-Cartan. Prova de i)

Suponha que  $q$  é ponto birregular então  $k_g(0) \neq 0$ . Assim,  $X_H(0, 0, 0) = (k_g(0), 0, 0) \neq (0, 0, 0)$  e a origem não é ponto singular do campo  $X_H$  (ver seção 3.1.1). Pelo teorema do fluxo tubular dada a seção transversal  $f(x, y) = (0, x, y)$  de  $X_H$  em  $(0, 0, 0)$  existe uma vizinhança  $V$  da origem em  $\mathbb{R}^3$  tal que  $X_H$  restrito a  $V$  é topologicamente conjugado ao campo constante de  $\mathbb{R}^3$ . Portanto as linhas de curvatura são transversais na vizinhança da origem que correspondem a curva final e as redes estão ilustradas em 3.3(a).



(a) Na vizinhança de ponto (b) Na vizinhança de um ciclo principal do infinito  
birregular final

Figura 3.3: Comportamento das redes principais dos itens i) e iii)

Prova de ii)

Suponha que  $q$  é ponto de inflexão bitransversal então  $k_g(0) = 0$  e por isso a origem é ponto singular de  $X_H$ . Pela proposição 3.2,  $H^{-1}(0)$  é um cone que contém o eixo  $s$  e as linhas de curvatura estão contidas nele. Além disso, a matriz jacobiana de  $X_H$ , no ponto singular, é

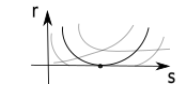
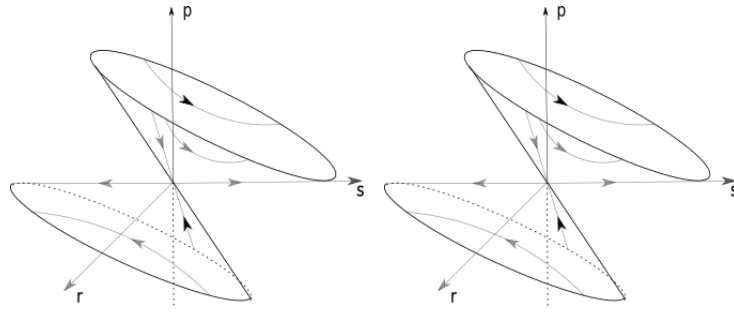
$$DX_H(0, 0, 0) = \begin{bmatrix} k'_g(0) & M_r(0, 0) & 2\nu(0) \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -k'_g(0) \end{bmatrix},$$

e os autovalores não nulos de  $DX_H(0, 0, 0)$  são  $k'_g(0)$  e  $-k'_g(0)$  associados, respectivamente, aos autovetores  $(1, 0, 0)$  e  $\left(1, 0, -\frac{\nu(0)}{k'_g(0)}\right)$ . Pela unicidade do teorema da variedade instável

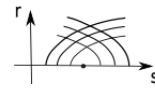
e estável a única curva invariante tangente a  $\left(1, 0, -\frac{\nu(0)}{k'_g(0)}\right)$  passando pela origem é

$$\varphi(t) = (0, 0, 0) + \left(1, 0, -\frac{\nu(0)}{k'_g(0)}\right) t + \left(0, -\frac{\nu(0)}{k'_g(0)}, 0\right) \frac{t^2}{2} + O(t^3).$$

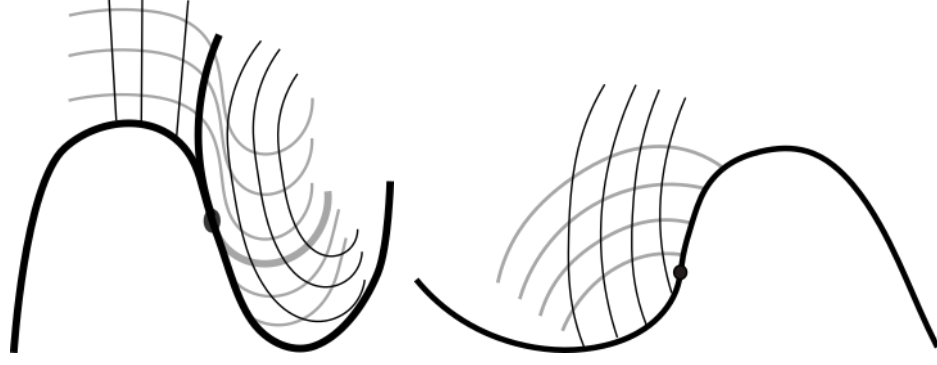
A projeção da curva invariante tangente ao autovetor associado a  $-k'_g(0)$  no plano  $(s, r)$ , é uma parábola e sua concavidade depende do sinal do produto  $\nu(0)k'_g(0)$ . Caso hiperbólico o produto é positivo então a concavidade é para cima. O outro caso a concavidade é para baixo.



(a) Caso hiperbólico



(b) Caso elíptico



(c) Na vizinhança de ponto de inflexão hiperbólico. (d) Na vizinhança de ponto de inflexão elíptico.

Figura 3.4: Comportamento das redes principais do item ii)

Prova de iii)

Neste caso vamos calcular a primeira e segunda derivada do mapa de Poincaré que pela definição é  $\pi(v) = r(L, v)$ , onde  $r(s, v)$  é solução da equação diferencial das linhas de curvatura do lema 3.1 com a condição inicial  $r(0, v) = v$ . Sendo solução satisfaz a equação

$$L(s, r(s, v))\left(\frac{dr(s, v)}{ds}\right)^2 + M(s, r(s, v))\frac{dr(s, v)}{ds} + N(s, r(s, v)) = 0. \quad (3.14)$$

Para encontrar  $\pi'(0) = \frac{d}{dv}r(s, v)|_{v=0}$  derivemos a equação (3.14) em relação  $v$  e avaliemos em  $v = 0$  e assim obtemos

$$M(s, 0)\frac{d}{dv}\left(\frac{dr(s, v)}{ds}\right)|_{v=0} + N_r(s, 0)\frac{dr(s, v)}{dv}|_{v=0} = 0. \quad (3.15)$$

Dividindo por  $M(s, 0) = k_g(s)$ , diferente de zero pois  $\gamma$  é ciclo principal, obtém-se a equação linear

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{dr(s, v)}{dv}|_{v=0}\right) + \frac{N_r(s, 0)}{M(s, 0)}\frac{dr(s, v)}{dv}|_{v=0} = 0. \quad (3.16)$$

A solução de (3.16) é

$$\frac{dr(s, v)}{dv}|_{v=0} = \exp\left[\int_0^L \frac{-N_r(s, 0)}{M(s, 0)}ds\right]. \quad (3.17)$$

Portanto a primeira derivada do mapa de Poincaré é

$$\pi'(0) = \frac{d}{dv}r(s, v)|_{v=0} = \exp\left[\int_0^L \frac{-N_r(s, 0)}{M(s, 0)}ds\right]. \quad (3.18)$$

Como  $N_r(s, 0) = 0$  segue que  $\pi'(0) = 1$ .

Para encontrar a derivada segunda  $\pi''(0) = \frac{d^2}{dv^2}r(s, v)|_{v=0}$  derivamos a expressão (3.16) em relação a  $v$  e obtemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dv} \left( \frac{d}{ds} \left( \frac{dr(s, v)}{dv} \Big|_{v=0} \right) \right) + \frac{M(s, 0)N_{rr}(s, 0) - M_r(s, 0)N_r(s, 0)}{M^2(s, 0)} \left( \frac{dr(s, v)}{dv} \Big|_{v=0} \right)^2 + \\ \frac{N_r(s, 0)}{M(s, 0)} \frac{d}{dv} \left( \frac{dr(s, v)}{dv} \Big|_{v=0} \right) = 0. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Agora, substituindo os dados do lema 3.1,  $N_r(s, 0) = 0$ ,  $M(s, 0) = k_g(s)$ ,  $N_{rr}(s, 0) = -2\frac{d}{ds}\nu(s) = -2\nu'(s)$ , na equação (3.19) têm-se que

$$\frac{d}{ds} \left( \frac{d^2 r(s, v)}{dv^2} \Big|_{v=0} \right) = \frac{-N_{rr}(s, 0)}{M(s, 0)} \left( \frac{dr(s, v)}{dv} \Big|_{v=0} \right)^2 = \frac{-2\nu'(s)}{k_g(s)}.$$

Portanto,

$$\pi''(0) = -2 \int_0^L \frac{\nu'(s)}{k_g(s)}.$$

■

Essa proposição caracteriza o comportamento das linhas de curvatura na vizinhança de pontos birregulares e de inflexões bitransversais, e de ciclos limites no infinito. De acordo com [1], a superfície é estruturalmente estável em seus fins nos casos i), ii) e iii). Antes de enunciar o teorema vamos definir estabilidade:

**Definição 3.2.** Seja  $\mathcal{A}_n$  o espaço de polinômios de grau menor ou igual a  $n$  e  $d_n$  uma métrica para este conjunto. Uma superfície algébrica  $A(\alpha)$ , é dita estruturalmente estável, se existe um  $\epsilon > 0$  tal que para todo polinômio  $\beta$  com  $d_n(\alpha, \beta) < \epsilon$ , existe um homeomorfismo  $h : A(\alpha) \rightarrow A(\beta)$  que faz a correspondência entre os pontos umbílicos e as linhas de curvatura de  $A(\alpha)$  e  $A(\beta)$ .

**Teorema 3.1.** *Seja  $A(\alpha)$  uma superfície algébrica regular e  $p$  um ponto final regular então a superfície é estruturalmente estável na vizinhança de um ponto final birregular, de um final de inflexão bitransversal e de uma ciclo principal do infinito.*

Demonstra-se esse teorema definindo um homeomorfismo que faz uma correspondência entre os pontos umbílicos e linhas de curvatura, na vizinhanças dos pontos finais regulares: birregulares, inflexão bitransversal e de uma curva final regular. Ele é definido em [4] usando a proposição 3.3 e segue do método das regiões canônicas.

A seguir é dado um exemplo explícito, que está no artigo [1], de uma superfície quádrlica com um ciclo semi-hiperbólico do infinito.

**Proposição 3.4.** O comportamento final de uma superfície algébrica quártica

$$A(H) = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3; H(x, y, z) = \left( \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - z^2 \right) (x^2 + y^2 + z^2) + cxyz = 0 \right\},$$

é semi-hiperbólico do infinito, sempre que  $c(a - b) \neq 0$ .

*Demonstração.* Fazendo a mudança de coordenadas  $u = \frac{x}{x^2 + y^2 + z^2}$ ,  $v = \frac{y}{x^2 + y^2 + z^2}$  e  $w = \frac{z}{x^2 + y^2 + z^2}$ , segue que

$$f_3(u, v, w) = H(u, v, w) = \frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2} - w^2 + cuvw,$$

ou seja, a quártica é transformada no cone  $A(f_3)$ . Note que  $\nabla f_3(0, 0, 0) = (0, 0, 0)$  e então, pelo teorema 1 de [7] a origem é um ponto crítico semi-hiperbólico. Portanto segue que os finais regulares da quártica também é semi-hiperbólico, desde que a inversão preserve linhas de curvatura e a característica do mapa de Poincaré. ■

A próxima proposição, é um outro exemplo de cúbica com ciclo principal semi-hiperbólico.

**Proposição 3.5.** Para  $\lambda(a - b) \neq 0$  e  $\lambda$  suficientemente pequeno, o comportamento final par, da superfície cúbica

$$A(\alpha) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; \alpha(x, y, z) = z \left( \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - z^2 \right) + \lambda xyz = 0\},$$

é um ciclo principal semi-hiperbólico do infinito.

*Demonstração.* Fazendo a mudança de coordenadas  $u = \frac{x}{x^2 + y^2 + z^2}$ ,  $v = \frac{y}{x^2 + y^2 + z^2}$  e  $w = \frac{z}{x^2 + y^2 + z^2}$ , segue que  $A(\alpha)$  é transformada na quádrlica  $A(H)$ , onde

$$H(u, v, w) = w \left( \frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2} - w^2 \right) + \lambda uv(u^2 + v^2 + w^2) = 0.$$

Vamos estudar o ciclo principal de  $A(H)$ , por meio da carta local

$$\xi_\lambda(s, r) = (x(s, r), y(s, r), z(s, r, \lambda)),$$

$$\text{onde } k^2 = \frac{a^2 - b^2}{1 + a^2}, \Delta = (1 - k^2 \operatorname{sen}^2(s))^{\frac{1}{2}}, \beta = (1 + a^2)^{\frac{1}{2}}, \rho(s, r) = \frac{r}{\beta \Delta}$$

e

$$x(s, r) = a\rho(s, r)\cos(s), \quad (3.20)$$

$$y(s, r) = s\rho(s, r)\operatorname{sen}(s), \quad (3.21)$$

$$z(s, r, \lambda) = \rho(s, r) + abr^2 \operatorname{sen}(s)\cos(s)\lambda + \lambda^2 A(s, r, \lambda). \quad (3.22)$$

Ela cobre  $A(H)$  globalmente, na vizinhança do cone

$$A(f_2) = \left\{ (u, v, w) \in \mathbb{R}^3; f_2(u, v, w) = \frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2} - w^2 = 0 \right\},$$

removendo a origem.

No caso  $\lambda = 0$ , segue que os coeficiente  $F(s, r, 0)$  e  $f(s, r, 0)$  das formas fundamentais na carta local  $\xi_0$  são nulos. Portanto, suas curvas coordenadas são linhas de curvatura de  $A(f_2)$ . Quando  $\lambda \neq 0$  a função  $z(s, r, \lambda)$  é obtida pela expansão de Taylor em  $\lambda$  no ponto  $\lambda = 0$ . Nesse ponto, as derivadas de  $z$  em relação a  $\lambda$  são obtidas ao derivar e resolver a expressão  $H(x(s, r), y(s, r), z(s, r, \lambda)) = 0$ .

Para concluir a semi-hiperbolicidade do ciclo principal calcularemos o mapa de Poincaré e mostraremos que a derivada segunda é não nula. Considere o mapa  $\Pi(r, \lambda) = R(2\pi, r, \lambda)$ , onde  $R(s, r, \lambda)$  é solução da equação das linhas de curvatura

$$(Fg - Gf) \left( \frac{dR}{ds} \right)^2 + (Eg - Ge) \frac{dR}{ds} + E + (Ef - Fe) = 0, \quad (3.23)$$

com condição inicial  $R(s, r, 0) = r$  e  $R_\lambda(s, r, 0) = 0$ . Derivando (3.23) em relação a  $\lambda$  e obtemos

$$(Eg - Ge)(s, r, 0) \frac{d}{ds} (R_\lambda(s, r, 0)) + (Ef_\lambda - F_\lambda e)(s, r, 0) = 0, \quad (3.24)$$

resolvendo (3.24), obtemos

$$R_\lambda(s, r, 0) = - \int_0^{2\pi} \frac{Ef_\lambda - F_\lambda e}{Eg - Ge} ds.$$

Assim,

$$\Pi_\lambda(r, 0) = R_\lambda(s, r, 0) = - \int_0^{2\pi} \frac{Ef_\lambda - F_\lambda e}{Eg - Ge} ds. \quad (3.25)$$

Por um cálculo direto, obtemos

$$\begin{aligned} E(s, r, 0) &= \frac{r^2}{\beta^2 \Delta^4} [b^2 + k^2 \operatorname{sen}^2(s)], \\ F(s, r, 0) &= 0, \\ G(s, r, 0) &= 1, \\ e(s, r, 0) &= \frac{-abr}{\beta^2 \Delta \sqrt{b^2 + k^2 \operatorname{sen}^2(s)}}, \\ f(s, r, 0) &= 0, \\ g(s, r, 0) &= 0, \\ F_\lambda(s, r, 0) &= \frac{-abr^2}{\beta \Delta^3} [1 - 2\operatorname{sen}^2(s) + k^2 \operatorname{sen}^4(s)] \\ f_\lambda(s, r, 0) &= \frac{-a^2 b^2 r}{\beta \sqrt{b^2 + k^2 \operatorname{sen}^2(s)}} \cos(2s). \end{aligned} \quad (3.26)$$

Ao substituir (3.26) em (3.25), encontramos a expressão da derivada do mapa de Poincaré



em função de integrais elípticas, como segue

$$\begin{aligned}\Pi_\lambda(r, 0) &= \int_0^{2\pi} \frac{abr^2}{\beta\Delta^3} \left\{ 1 - b^2 + (2b^2 - k^2 - 2)\text{sen}^2(s) + 3k^2\text{sen}^4(s) \right\} ds, \\ &= \frac{abr^2}{\beta\Delta^3} \left\{ (1 - b^2) \int_0^{2\pi} \frac{1}{\Delta^3} ds + (2b^2 - k^2 - 2) \int_0^{2\pi} \frac{\text{sen}^2(s)}{\Delta^3} ds + 3k^2 \int_0^{2\pi} \frac{\text{sen}^4(s)}{\Delta^3} ds \right\}.\end{aligned}\quad (3.27)$$

Usando as expressões (3.28) das integrais elípticas que aparecem em (3.27)

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \frac{1}{\Delta^3} ds &= \frac{1}{k_1^2} \xi(k), \\ \int_0^{2\pi} \frac{\text{sen}^2(s)}{\Delta^3} ds &= \frac{1}{k_1^2 k^2} \xi(k) - \frac{1}{k^2} \mathcal{F}(k), \\ \int_0^{2\pi} \frac{\text{sen}^4(s)}{\Delta^3} ds &= \frac{2 - k^2}{k_1^2 k^2} \xi(k) - \frac{2}{k^4} \mathcal{F}(k).\end{aligned}\quad (3.28)$$

onde,

$$k_1^2 = 1 - k^2, \quad \xi(k) = \int_0^{2\pi} \Delta ds, \quad \text{e } \mathcal{F}(k) = \int_0^{2\pi} \Delta^{-1} ds,$$

segue que a expressão (3.27) torna-se

$$\Pi_\lambda(r, 0) = \frac{abr^2}{\beta} \left\{ \left( \frac{4 + 2b^2 - 3k^2 - b^2 k^2}{k^2 k_1^2} \right) \xi(k) + \left( \frac{b^2 - 2b^2 - 4}{k^2} \right) \mathcal{F}(k) \right\} ds. \quad (3.29)$$

Defina

$$\begin{aligned}\mathcal{D}(k) &= \frac{\mathcal{F}(k) - \xi(k)}{k^2}, \\ \mathcal{K}(k, \beta) &= \frac{\beta^2}{1 + \beta^2} [\mathcal{F}(k) - 2\mathcal{D}(k)] + \mathcal{D}(k),\end{aligned}\quad (3.30)$$

então substituindo (3.28) e (3.30) em (3.29) temos

$$\Pi_\lambda(r, 0) = \frac{abr^2 k^2 \beta \mathcal{K}(k, \beta)}{2}. \quad (3.31)$$

Os próximos passos é mostrar que  $\mathcal{K}(k, \beta) \neq 0$ . A equação  $\mathcal{K}(k, \beta)$  é igual a zero quando  $\frac{\mathcal{F}(k) - 2\mathcal{D}(k)}{\mathcal{D}(k)} = \frac{-1 + \beta^2}{\beta^2}$ . Note que pela regra de L'Hospital temos

$$\mathcal{D}(0) = \lim_{k \rightarrow 0} \mathcal{D}(k) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{(\mathcal{F}(k) - \mathcal{E}(k)) k}{2k} = \pi.$$

Usemos isso para definir uma função  $A(k)$ , como segue

$$A(k) = \begin{cases} \frac{\mathcal{F}(k) - 2\mathcal{D}(k)}{\mathcal{D}(k)}, & \text{se } k \neq 0 \\ \frac{\mathcal{F}(0) - 2\mathcal{D}(0)}{\mathcal{D}(0)} = 0, & \text{se } k = 0 \end{cases}.$$

Além disso,

$$\begin{aligned} A'(0) &= 0, \\ A''(0) &= -\frac{1}{2}, \\ \lim_{k \rightarrow 1} A(k) &= -1, \end{aligned}$$

e em série de Taylor  $A(k) = -\frac{1}{4}k^2 + O(k)$ . e  $A([0, 1)) = (-1, 0]$ . Como

$$\left\{ r \in \mathbb{R}; r = \frac{-1 - \beta^2}{\beta^2} \right\} \cap [-1, 0] = \emptyset.$$

Portanto,  $\mathcal{K}(k, \beta) \neq 0$ . Integrando (3.31) com respeito a  $\lambda$  e derivando duas vezes em relação a  $r$ , segue que  $\Pi_\lambda(0, \lambda) = \lambda abk^2 \beta \mathcal{K}(k, \beta) \neq 0$  para  $\lambda k \neq 0$ . Isso prova a semi-hiperbolicidade do ciclo principal. ■

**Proposição 3.6.** Seja  $A(h)$  uma superfície algébrica cúbica com  $h$  escrito na forma

$$\begin{aligned} h(x, y, z) &= (\gamma_3(x, y) + \gamma_2(x, y)z + \gamma_1(x, y)z^2 + \gamma_0(x, y)z^3) + \\ &+ (\beta_2(x, y) + \beta_3(x, y)z + \beta_0(x, y)z^2) + \\ &+ a_1x + a_2y + a_3z + d. \end{aligned}$$

Se  $A(h)$  tem um final regular par então ele pode ser aproximado por uma superfície cujo final regular par é um ciclo principal do infinito semi-hiperbólico.

*Demonstração.* Fazendo a mudança de coordenadas  $x = \frac{u}{w}$ ,  $y = \frac{v}{w}$ ,  $z = \frac{1}{w}$ , segue que

$$\begin{aligned} h(u, v, w) &= (\gamma_3(u, v) + \gamma_2(u, v) + \gamma_1(u, v) + \gamma_0(u, v)) + \\ &+ (\beta_2(u, v) + \beta_3(u, v) + \beta_0(u, v))w + \\ &+ (a_1u + a_2v + a_3)w^2 + dw^3. \end{aligned}$$

Com essa mudança de coordenadas os pontos finais da superfície algébrica corresponde aos pontos em que  $\gamma(u, v) = \gamma_3(u, v) + \gamma_2(u, v) + \gamma_1(u, v) + \gamma_0(u, v) = 0$ . Por hipótese os finais regulares tem uma componente par.

Fazendo uma translação nas coordenadas tal que a origem é um ponto de máximo ou mínimo da função  $(u, v) \rightarrow \gamma(u, v)$ , ou seja  $\gamma_u(0, 0) = \gamma_v(0, 0) = 0$  com  $Hessian(\gamma) > 0$ .

Com essas condições podemos reescrever  $\gamma$  da seguinte forma

$$\gamma(u, v) = \gamma_3(u, v) + \frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2} - \epsilon^2. \quad (3.32)$$

De fato, lembrando que as funções  $\gamma_i$  denotam polinômios de grau  $i$  elas são da forma

$$\begin{aligned} \gamma_3(u, v) &= \sum_{i,j=0}^3 a_{i,j} u^i v^j; i+j=3, \\ \gamma_2(u, v) &= \sum_{i,j=0}^2 a_{i,j} u^i v^j; i+j=2, \\ \gamma_1(u, v) &= a_{1,0}u + a_{2,0}v. \end{aligned}$$

Derivando a função  $\gamma$  em relação a  $u$ , a  $v$  na origem, segue que  $\gamma_u(0, 0) = a_{1,0} = 0 = \gamma_v(0, 0) = a_{0,1}$ . Da outra condição obtemos

$$Hessian(\gamma) = 4a_{2,0}a_{0,2} - a_{1,1}^2 > 0.$$

Escolhendo  $a_{1,1} = 0$ ,  $a_{2,0} = \frac{1}{a^2}$ ,  $a_{0,2} = \frac{1}{b^2}$ , e  $\gamma_0 = -\epsilon^2$ , a desigualdade acima e (3.32) são satisfeitas. Retornando as coordenadas  $(x, y, z)$ , ou seja fazendo  $u = xw, v = yw$  e  $w = \frac{1}{z}$  segue que

$$h(x, y, z) = h_3(x, y, z) + h_2(x, y, z) + h_1(x, y, z) + h_0,$$

onde  $h_3 = \gamma_3(x, y) + f_3(x, y, z)$ , e  $h_i$  são polinômios homogêneos de grau  $i$  e  $f_3(x, y, z) = \left( \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \epsilon^2 z^2 \right) z$ .

Defina a família a um parâmetro  $H_\lambda$  por

$$H_\lambda(x, y, z) = f_3(x, y, z) + \lambda \gamma_3(x, y) + \lambda (h_2(x, y, z) + h_1(x, y, z) + h_0),$$

então

$$\begin{aligned} H_1(x, y, z) &= h(x, y, z), \\ H_0(x, y, z) &= f_3(x, y, z). \end{aligned}$$

Para  $\lambda \in [0, 1]$  o comportamento final ímpar e par são disjuntos e regulares, por que  $\gamma$  é regular. Pelo item *iii*) de (3.3) a derivada segunda do mapa de Poincaré associado a um ciclo principal  $\gamma(s) = (x(s), y(s), z(s))$  de  $f_3$  é dada por

$$\Pi''(0, \lambda) = \sum a_{i,j,k} C_{i,j,k}(a, b), i+j+k=2, \quad (3.33)$$

onde

$$h_2(x, y, z) = a_{2,0,0}x^2 + a_{0,2,0}y^2 + a_{0,0,2}z^2 + a_{1,1,0}xy + a_{1,0,1}xz + a_{0,1,1}yz, \quad (3.34)$$

$$C_{i,j,k} = \int_{\gamma} \frac{-2x(s)^i y(s)^j z(s)^k}{|\nabla(H_{\lambda})_3(\gamma(s))|} \frac{d}{ds} \left( \frac{1}{k_g(s)} \right) ds. \quad (3.35)$$

Então queremos mostrar que a expressão (3.33) é não nula para  $\lambda$  próximo de 1. Em (3.33), com exceção do termo  $a_{1,1,0}C_{1,1,0}$  todos os outros desaparecem. De fato, as contribuições dos termos  $xz$ ,  $yz$  e  $z^2$ , que definem  $C_{1,0,1}$ ,  $C_{0,1,1}$  e  $C_{0,0,2}$ , são zero porque as superfícies correspondente  $f_3 + a_{1,0,1}xz = 0$ ,  $f_3 + a_{0,1,1}yz = 0$  e  $f_3 + a_{0,0,2}z^2 = 0$  é a união de um cone quadrático e o plano  $z = 0$ , tem mapa de Poincaré igual a identidade.

O mesmo vale para os termos  $x^2$  e  $y^2$  porque as superfícies  $f_3 + a_{1,0,0}x^2$  e  $f_3 + a_{0,2,0}y^2$  são invariantes sob as simetrias  $(x, y, z) \rightarrow (-x, y, z)$  e  $(x, y, z) \rightarrow (x, -y, z)$ .

Pela Proposição (3.5), o comportamento final da cúbica  $g_3(x, y, z) = f_3(x, y, z) + \lambda a_{1,1,0}xy = 0$  é um ciclo principal semi-hiperbólico do infinito se  $\lambda a_{1,1,0}(b - a)$  é diferente de zero. Então a próxima condição genérica que impomos é que o coeficiente  $a_{1,1,0}$  de  $h$  é diferente de zero. Portanto  $\Pi''(0, \lambda) \neq 0$ . Por continuação analítica, o mapa de Poincaré tem derivada segunda não nula para valores de  $\lambda$  arbitrariamente perto de 1. Isso finaliza a prova. ■

## 3.2 Pontos Umbílicos e Finais Regulares

Uma superfície algébrica de  $\mathbb{R}^3$  com um ponto umbílico na origem do sistema de coordenadas, pode ser expressa na carta de Monge como o gráfico da superfície

$$z = \frac{k}{2}(x^2 + y^2) + \frac{a}{6}x^3 + \frac{b}{2}xy^2 + \frac{c}{6}y^3 + O((x^2 + y^2)^2).$$

Em [6] e [4] consta a demonstração desse resultado e também o estudo das linhas de curvatura numa vizinhança dos três tipos de pontos umbílicos Darbouxianos. Escreva  $z = f(x, y)$  então a equação diferencial das linhas de curvatura em torno do ponto umbílico é  $Ldy^2 + Mdx dy + Ndx^2$ , onde

$$\begin{aligned} L &= -(1 + f_y^2)f_{xy} + f_x f_y f_{yy}, \\ M &= -(1 + f_x^2)f_{yy} + -(1 + f_y^2)f_{xx}, \\ N &= -(1 + f_x^2)f_{xy} + f_x f_y f_{xx}. \end{aligned} \quad (3.36)$$

Nessa notação, as condições Darbouxianas em um ponto umbílico, ou seja, quando  $L =$

$M = 0$  (o que implica também que  $N = 0$ ), podem ser expressas como segue:

$$\begin{aligned} DC1 : & (L_x M_y - L_y M_x)(N_y M_x - N_x M_y) - (N_x L_y - L_x N_y)^2 \neq 0 \\ DC2 : & \text{As raízes de } L_y t^3 + (L_x + M_y)t^2 + (M_x - N_y)t + N_x \text{ são distintas} \\ & \text{umas das outras e ninguém é uma raiz de } 2L_y t^2 + (M_y + 2L_x)t + M_x. \end{aligned}$$

Os resultados a seguir utilizarão essas condições dos pontos umbílicos Darbouxianos e tratarão das duas primeiras hipóteses do conjunto das superfícies estruturalmente estáveis que é discutido na última seção do artigo [1]. Define-se o conjunto  $\mathcal{G}_n(a, b)$ , como segue:

**Definição 3.3.** Seja  $\mathcal{A}_n$  o conjunto dos polinômios de grau  $n$ . Defina  $\mathcal{G}_n(i)$  como sendo um conjunto de  $\mathcal{A}_n$  tal que para  $\alpha \in \mathcal{G}_n$ , as condições  $i = a, b$  ou  $i = a$  ou  $i = b$  são satisfeitas, onde

- a)  $A(\alpha)$  é regular, regular no infinito e todos os pontos de inflexão são bitransversais.
- b) Todos os pontos umbílicos de  $A(\alpha)$  são Darbouxianos.

**Proposição 3.7.** Existe um polinômio não trivial  $T_n$  em  $\mathcal{A}_n$ ,  $n > 1$ , tal que para  $\alpha$  no complementar do conjunto de seus zeros, segue que

- a) O conjunto dos pontos umbílicos  $U(\alpha)$  é dado pelos pontos de interseção de  $A(\alpha)$  com duas outras superfícies algébricas  $A(R_{\alpha,113})$  e  $A(R_{\alpha,123})$  ambas de grau  $4n - 5$ . Além disso, todos esses pontos são Darbouxianos e os vetores gradientes das superfícies são linearmente independentes, ou seja  $[\nabla\alpha, \nabla R_{\alpha,113}, \nabla R_{\alpha,123}] \neq 0$ .
- b) Os conjuntos algébricos finais

$$E_n(\alpha) = \{(x, 0) \in \mathbb{S}^3; \alpha_n(x) = 0\},$$

$$E_n(R_{\alpha,113}) = \{(x, 0) \in \mathbb{S}^3; R_{\alpha,113}^n(x) = 0\},$$

$$E_n(R_{\alpha,123}) = \{(x, 0) \in \mathbb{S}^3; R_{\alpha,123}^n(x) = 0\},$$

tem interseção vazia, onde os polinômios  $\alpha_n, R_{\alpha,113}^n, R_{\alpha,123}^n$  correspondem, respectivamente, a parte homogênea de grau  $n$  de  $\alpha, R_{\alpha,113}, R_{\alpha,123}$ .

*Demonstração.* Vamos encontrar a equação das linhas de curvatura, para isso considere a equação de Rodrigues

$$dN_\alpha(p)dp \wedge dp = 0, \quad (3.37)$$

$$\langle N(p), dp \rangle = 0. \quad (3.38)$$

Como  $N_\alpha = \frac{\nabla\alpha}{|\nabla\alpha|}$ , escreva  $N_\alpha = \sum_{i=1}^3 N_\alpha^i \frac{\partial}{\partial x_i}$ , com  $N_\alpha^i = \frac{\alpha_i}{|\nabla\alpha|}$ , onde  $\alpha_i$  denota a derivada de  $\alpha$  em relação a coordenada  $x_i$ . Derivando  $|\nabla\alpha|$  encontramos

$$\frac{\partial}{\partial x_k} (\langle \nabla \alpha, \nabla \alpha \rangle)^{1/2} = \langle \nabla \alpha, \nabla \alpha \rangle^{-1/2} \left\langle \frac{\partial(\nabla \alpha)}{\partial x_k}, \nabla \alpha \right\rangle,$$

onde

$$\frac{\partial(\nabla \alpha)}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \frac{\partial}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \frac{\partial}{\partial x_2} \right) + \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \frac{\partial}{\partial x_3} \right) = \sum_{j=1}^3 \alpha_{kj}.$$

Disto, teremos que a derivada da norma do gradiente de  $\alpha$  é

$$\frac{\partial}{\partial x_k} (\langle \nabla \alpha, \nabla \alpha \rangle)^{1/2} = \langle \nabla \alpha, \nabla \alpha \rangle^{-1/2} \sum_{j=1}^3 \alpha_j \alpha_{kj}.$$

Derivando  $N_\alpha^i$  em relação a  $j$  obtemos

$$N_{\alpha j}^i = (\langle \nabla \alpha, \nabla \alpha \rangle)^{-3/2} \left\{ \left( \sum_{k=1}^3 \alpha_k^2 \right) \alpha_{ij} - \sum_{i,k=1}^3 \alpha_i \alpha_k \alpha_{ik} \right\}. \quad (3.39)$$

Escrevendo as equações de rodrigues em termos das coordenadas do vetor normal obtemos as quatro seguintes equações

$$\left( \sum_{i=1}^3 N_{\alpha i}^1 dx_i \right) dx_3 - dx_2 \left( \sum_{i=1}^3 N_{\alpha i}^3 dx_i \right) = 0, \quad (3.40)$$

$$\left( \sum_{i=1}^3 N_{\alpha i}^2 dx_i \right) dx_1 - dx_3 \left( \sum_{i=1}^3 N_{\alpha i}^1 dx_i \right) = 0, \quad (3.41)$$

$$\left( \sum_{i=1}^3 N_{\alpha i}^3 dx_i \right) dx_1 - dx_2 \left( \sum_{i=1}^3 N_{\alpha i}^2 dx_i \right) = 0, \quad (3.42)$$

$$\sum_{i=1}^3 N_{\alpha i}^i dx_i = 0. \quad (3.43)$$

Desde que  $A(\alpha)$  é regular, uma das coordenadas do normal é não nula, suponha que seja  $N_\alpha^3$ . Isolando  $dx_3$  na equação (3.43) e substituindo-o na expressão (3.42) obtemos:

$$dx_3 = \frac{-N_\alpha^1 dx_1 - N_\alpha^2 dx_2}{N_\alpha^3} \quad (3.44)$$

$$\begin{aligned} & \left( \frac{-N_{\alpha 1}^2 N_\alpha^3 + N_{\alpha 3}^2 N_\alpha^1}{N_\alpha^3} \right) dx_1^2 + \left( \frac{N_{\alpha 2}^3 N_\alpha^3 - N_{\alpha 3}^3 N_\alpha^2}{N_\alpha^3} \right) dx_2^2 + \\ & + \left( \frac{N_{\alpha 1}^3 N_\alpha^3 - N_{\alpha 2}^2 N_\alpha^3 - N_{\alpha 3}^3 N_\alpha^1 - N_{\alpha 3}^2 N_\alpha^2}{N_\alpha^3} \right) dx_1 dx_2 = 0. \end{aligned} \quad (3.45)$$

Desse modo, os pontos umbílicos da região  $B_3(\alpha) = \{p; \alpha_3(p) \neq 0\}$  ocorrem quando os coeficientes de  $dx_1^2$  e  $dx_1 dx_2$  são nulos. Dessa maneira, para satisfazer essas condições e o

primeiro item dessa proposição, defina

$$R_{\alpha,113} = -N_{\alpha 1}^2 N_{\alpha}^3 + N_{\alpha 3}^2 N_{\alpha}^1, \quad (3.46)$$

$$R_{\alpha,223} = N_{\alpha 2}^3 N_{\alpha}^3 - N_{\alpha 3}^3 N_{\alpha}^2, \quad (3.47)$$

$$R_{\alpha,123} = N_{\alpha 1}^3 N_{\alpha}^3 - N_{\alpha 2}^2 N_{\alpha}^3 - N_{\alpha 3}^3 N_{\alpha}^1 - N_{\alpha 3}^2 N_{\alpha}^2. \quad (3.48)$$

Os pontos umbílicos  $U(\alpha)$  são a interseção das superfícies  $A(\alpha)$ ,  $A(R_{\alpha,113})$  e  $A(R_{\alpha,123})$ . Substituindo a derivada do normal que calculamos em (3.39) obtemos (3.46), (3.47) e (3.48) em termos das derivadas do polinômio  $\alpha$ , como segue:

$$\begin{aligned} R_{\alpha,113} &= \alpha_3[\alpha_{12}(\alpha_1^2 + \alpha_3^2) - \alpha_1\alpha_2\alpha_{11} - \alpha_3\alpha_2\alpha_{13}] \\ &\quad - \alpha_1[\alpha_{23}(\alpha_1^2 + \alpha_3^2) - \alpha_1\alpha_2\alpha_{13} - \alpha_3\alpha_2\alpha_{33}], \\ R_{\alpha,223} &= \alpha_2[\alpha_{13}(\alpha_2^2 + \alpha_3^2) - \alpha_1\alpha_2\alpha_{23} - \alpha_3\alpha_1\alpha_{33}] \\ &\quad - \alpha_3[\alpha_{12}(\alpha_2^2 + \alpha_3^2) - \alpha_1\alpha_2\alpha_{22} - \alpha_3\alpha_1\alpha_{23}], \\ R_{\alpha,123} &= \alpha_1[\alpha_{13}(\alpha_2^2 + \alpha_3^2) - \alpha_1\alpha_2\alpha_{23} - \alpha_3\alpha_1\alpha_{33}] \\ &\quad - \alpha_2[\alpha_{23}(\alpha_1^2 + \alpha_3^2) - \alpha_1\alpha_2\alpha_{13} - \alpha_3\alpha_2\alpha_{33}] \\ &\quad + \alpha_3[\alpha_{22}(\alpha_1^2 + \alpha_3^2) - \alpha_3\alpha_2\alpha_{23} - \alpha_{11}(\alpha_2^2 + \alpha_3^2) + \alpha_3\alpha_1\alpha_{13}]. \end{aligned}$$

Conforme o grau de  $\alpha$ , que é  $n$ , vemos que o grau dos polinômios acima é  $4n - 5$ . Continuando a prova de *a*), tomemos o resultante da eliminação de  $x$  ao longo dos polinômios

$$\alpha, \alpha_3, R_{\alpha,113}, R_{\alpha,123}, [\nabla\alpha, \nabla R_{\alpha,113}, \nabla R_{\alpha,123}].$$

Então para  $\alpha$  no complementar de zeros de  $T_a$  ocorre  $[\nabla\alpha, \nabla R_{\alpha,113}, \nabla R_{\alpha,123}] \neq 0$ . Para finalizar a demonstração, é necessário acrescentar a estes polinômios a condição dos pontos Darbouxianos DC2, em termos de discriminante e resultante. Isso define um outro polinômio  $T_a$ , que expressa também a característica dos pontos umbílico Darbouxianos. Para a prova de *b*) seja  $T_b$  o resultante dos polinômios

$$\alpha_n, R_{\alpha,113}^n, R_{\alpha,123}^n$$

e então para  $\alpha$  no complementar de zeros de  $T_b$  ocorre que a interseção dos algébricos finais é vazia. Finalmente, escolhemos  $T_n = T_a T_b$ . ■

**Proposição 3.8.** Existe um polinômio não trivial  $R_n$  em  $\mathcal{A}_n, n > 1$ , tal que para  $\alpha$  no seu complementar de conjunto de zeros, segue que:  $A(\alpha)$  é regular e regular no infinito.

*Demonstração.* Seja  $R_a$  o resultante dos polinômios  $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ , onde o índice  $i$  indica a derivada de  $\alpha$  em relação a coordenada  $x_i$ . Isso diz que nos pontos em que  $R_a$  não zera os polinômios, acima, não se anulam simultaneamente. Portanto, estes correspondem aos pontos regulares da superfície algébrica  $A(\alpha)$ . Desse modo se  $R_a(\alpha)$  indica o polinômio

$R_a$  avaliado nos pontos de  $A(\alpha)$ , quando  $R_a(\alpha)$  é diferente de zero tal superfície é regular. Para a regularidade de  $A(\alpha)$ , escreva  $\nabla\alpha_n(x) \wedge x = (A_1(\alpha_n, x), A_2(\alpha_n, x), A_3(\alpha_n, x))$ . Seja  $R_1(\alpha_n)$  o resultante da eliminação de  $x$  ao longo de  $\alpha_n(x), A_2(\alpha_n, x), A_3(\alpha_n, x)$ . Similarmente,  $R_2(\alpha_n)$  e  $R_3(\alpha_n)$  os resultantes da eliminação de  $x$  ao longo de  $\alpha_n(x), A_1(\alpha_n, x), A_3(\alpha_n, x)$  e  $\alpha_n(x), A_1(\alpha_n, x), A_2(\alpha_n, x)$ , respectivamente. Seja  $R_b(\alpha) = R_1(\alpha_n)R_2(\alpha_n)R_3(\alpha_n)$  então para os pontos de  $A(\alpha)$  tais que  $R_b(\alpha)$  é diferente de zero segue que  $A_1(\alpha_n, x)$  e  $A_2(\alpha_n, x)$ ,  $A_1(\alpha_n, x)$  e  $A_3(\alpha_n, x)$ , e  $A_2(\alpha_n, x)$  e  $A_3(\alpha_n, x)$  não se anulam simultaneamente nos pontos  $x$  tais que  $\alpha_n(x) = 0$  e portanto a superfície algébrica é regular no infinito para  $\alpha$  no complementar de zeros de  $R_b(\alpha)$ . Para finalizar a demonstração escolha  $R_n(\alpha) = R_a(\alpha)R_b(\alpha)$ . ■

**Proposição 3.9.** Existe um polinômio não trivial  $T_n$  em  $\mathcal{A}_n, n > 1$ , tal que para  $\alpha$  no complementar de zeros, os finais regulares e os pontos de inflexão são bitransversais.

*Demonstração.* A curvatura geodésica de um final regular  $E(\alpha)$ , considerando como a curva esférica, é obtida como segue. Seja  $\gamma(s)$  a parametrização pelo comprimento de arco  $s$  tal que  $\alpha_n(\gamma(s)) = 0$ . Diferenciando essa equação obtemos

$$\langle \nabla\alpha_n(\gamma(s)), \gamma_s(s) \rangle = 0. \quad (3.49)$$

Diferenciando (3.49) em relação a  $s$  obtemos

$$\langle d(\nabla\alpha_n(\gamma(s))), \gamma_s(s) \rangle + \langle \nabla\alpha_n(\gamma(s)), \gamma_{ss}(s) \rangle = 0. \quad (3.50)$$

onde  $d(\nabla\alpha_n(\gamma(s)))$  significa a derivada do gradiente enquanto que  $\gamma_{ss}(s)$  a derivada segunda de  $\gamma$  em relação a  $s$ . Na base ortonormal positiva  $\{\gamma_s, \gamma, \gamma_s \wedge \gamma\}$  segue que

$$\gamma_{ss} = -\gamma + k_g(s)\gamma_s \wedge \gamma, \quad (3.51)$$

pois  $\langle \gamma_{ss}, \gamma \rangle = -1$  e  $\langle \gamma_{ss}, \gamma_s \rangle = 0$ .

De (3.49) o gradiente de  $\alpha_n(\gamma(s))$  é ortogonal a derivada de  $\gamma(s)$  e por isso  $\nabla\alpha_n(\gamma(s))$  na base ortonormal acima é

$$\nabla\alpha_n(\gamma(s)) = \langle \nabla\alpha_n(\gamma(s)), \gamma \rangle \gamma + \langle \nabla\alpha_n(\gamma(s)), \gamma_s \wedge \gamma \rangle \gamma_s \wedge \gamma. \quad (3.52)$$

então

$$\langle \nabla\alpha_n(\gamma(s)), \gamma_{ss}(s) \rangle = \langle \nabla\alpha_n(\gamma(s)), \gamma_s \wedge \gamma \rangle |\gamma_s \wedge \gamma|^2 k_g(s) = |\nabla\alpha_n(\gamma(s))| \cos(0) k_g(s), \quad (3.53)$$

onde 0 é o ângulo entre  $\nabla\alpha_n(\gamma(s))$  e  $\gamma_s \wedge \gamma$ . Substituindo (3.53) em (3.50) encontramos a curvatura geodésica

$$k_g(s) = \frac{-\langle d(\nabla\alpha_n(\gamma(s))), \gamma_s(s) \rangle}{|\nabla\alpha_n(\gamma(s))|}. \quad (3.54)$$



Derivando (3.54) em relação a  $s$  nos pontos de inflexão, isto é  $k_g(s) = 0$ , encontramos

$$k'_g(s) = \frac{-\langle d^2(\nabla\alpha_n(\gamma(s))), \gamma_s(s) \rangle}{|\nabla\alpha_n(\gamma(s))|}. \quad (3.55)$$

Também derivando  $\frac{\alpha_{n-1}(\gamma(s))}{|\nabla\alpha_n(\gamma(s))|}$  em relação a  $s$  resulta que

$$\left( \frac{\alpha_{n-1}(\gamma(s))}{|\nabla\alpha_n(\gamma(s))|} \right)_s = \frac{d(\alpha_{n-1}(\gamma(s)))|\nabla\alpha_n(\gamma(s))| - \alpha_{n-1}(\gamma(s))d(|\nabla\alpha_n(\gamma(s))|)}{|\nabla\alpha_n(\gamma(s))|^2}.$$

Denote por  $R_g(\alpha_n), R_p(\alpha_n)$  o resultante da eliminação de  $p$  ao longo de respectivamente

$$\alpha_n(p), k_g|\nabla\alpha_n(\gamma(s))|^3, k'_g|\nabla\alpha_n(\gamma(s))|^4$$

e

$$\alpha_n(p), k'_g|\nabla\alpha_n(\gamma(s))|^4, \nu(p)|\nabla\alpha_n(\gamma(s))|^4.$$

Escolha  $T_n = R_p(\alpha_n)R_g(\alpha_n)R_b(\alpha)$ . ■

**Teorema 3.2.** *Seja  $n > 1$ . Então,  $\mathcal{G}_n(a, b)$  é um conjunto aberto e denso de  $\mathcal{A}_n$  que contém o complemento do conjunto de zeros de um polinômio não trivial em  $\mathcal{A}_n$ .*

*Demonstração.* Seja  $T_n$  o produto dos polinômios encontrado nas três proposições. Então para  $\alpha$  em  $\mathcal{G}_n$  e no complementar do conjunto de zeros deste  $T_n$ . Segue das proposições 3.7, 3.8 e 3.9 que  $A(\alpha)$  satisfaz as condições do conjunto  $\mathcal{G}_n(a, b)$  e portanto ele contém o complementar do conjunto de zeros de  $T_n$ . ■

### 3.3 Ciclos Limites no Infinito

**Definição 3.4.** Seja  $A(\alpha)$  uma superfície algébrica de grau  $n$ ,  $\beta_j$  uma coleção de linhas de curvatura fechada máximas ou mínimas de  $A(\alpha)$  e  $\beta$  também uma linha de curvatura fechada máxima ou mínima dessa superfície algébrica, segue as seguintes definições:

- I)  $\beta_j$  é uma **banda principal cíclica** quando esta coleção preenche um cilindro ou um toro aberto.
- II)  $\beta$  é um **ciclo limite principal** quando este ciclo for isolado.
- III) Um ciclo limite é chamado de hiperbólico quando a derivada do mapa de Poincaré associada a este ciclo é diferente de um.

**Teorema 3.3** (Iliaskenko). *Seja  $\bar{X}_H$  um campo polinomial no plano real cujos pontos singulares são não degenerados, incluindo os do infinito, então existe um número finito de ciclos limite.*

*Demonstração.* Demonstração encontra-se no artigo [5]. ■

**Teorema 3.4.** *Para todas as superfícies em  $\mathcal{G}_n(a, b)$ , ocorre que as linhas fechadas  $F_1, F_2$  são agrupadas em um úmero finito de banda principal cíclica e ciclos limite principais.*

*Demonstração.* Dada uma superfície  $A(\alpha)$  no conjunto  $\mathcal{G}_n(a, b)$ , ela satisfaz duas propriedades:

- a)  $A(\alpha)$  é regular, regular no infinito e todos os pontos de inflexão são bitransversais.
- b) Todos os pontos umbílicos de  $A(\alpha)$  são Darbouxianos.

Vamos usar essas condições para caracterizar os ciclos principais. Estes satisfazem a equação  $H(s, r, p) = L(s, r)p^2 + M(s, r)p + N(s, r)$ , onde  $L(s, r)$ ,  $M(s, r)$  e  $N(s, r)$  são funções já calculadas no lema 3.1 e as soluções dessa equação diferencial é a projeção do campo de Lie-Cartan:  $X_H(s, r, p) = (H_p, pH_p, -H_s - pH_r)$ . Denote por  $\bar{X}_H$  a projeção do campo  $X_H$  no plano real. Esse campo é polinomial. Assim, para usar o teorema 3.3, basta ver se os pontos singulares são não degenerados.

Por causa da propriedade a) os pontos de inflexão, singularidades infinitas, são bitransversais e como consequência do resultado 3.2 os pontos de inflexão são não degenerados. De acordo com [9] (seção: singularidades do campo de Lie-Cartan) os pontos umbílicos serem todos Darbouxianos implica que esta é uma singularidade não degenerada.

Portanto as hipóteses do teorema 3.3 são satisfeitas e existe um número finito de ciclos limites. ■

**Proposição 3.10.** Dada a superfície implícita  $A(F_\epsilon)$ , com

$$F_\epsilon(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + z^2 - \epsilon x^{2k-1}y^{2l-1} - 1,$$

$b < a < 1$ ,  $a - b$  pequeno e  $d = (2k - 2l - 2) \geq 4$ . Se  $\epsilon$  é suficientemente pequeno e não nulo, então a curva

$$\begin{aligned} c_\epsilon &= A(F_\epsilon) \cap \{z = 0\} \\ &= \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2; \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \epsilon x^{2k-1}y^{2l-1} = 1 \right\}, \end{aligned} \tag{3.56}$$

é um ciclo principal hiperbólico de  $A(F_\epsilon)$ .

*Demonstração.* Considere a parametrização  $\alpha$  de  $A(\alpha)$  dada por

$$\alpha(\theta, z) = (a(1 + R(\theta, z, \epsilon))\cos(\theta), b(1 + R(\theta, z, \epsilon))\sin(\theta), z),$$

onde  $R$  é definido pela equação implícita

$$(1 + R)^2 + z^2 + \epsilon(1 + R)^d h(\theta) - 1 = 0,$$

com  $h(\theta) = (acos(\theta))^{2k-1}(asen(\theta))^{2l-1}$ . Dessa parametrização encontra-se os coeficientes das formas fundamentais e as linhas de curvatura nas coordenadas  $(\theta, z)$  dada por

$$L(\theta, z, \epsilon)dz^2 + M(\theta, z, \epsilon)dzd\theta + L(\theta, z, \epsilon)d\theta^2, \quad (3.57)$$

com

$$\begin{aligned} L(\theta, z, \epsilon) &= (fG - gF)(\theta, z, \epsilon), \\ M(\theta, z, \epsilon) &= (Eg - Ge)(\theta, z, \epsilon), \\ N(\theta, z, \epsilon) &= (Ef - Fe)(\theta, z, \epsilon). \end{aligned}$$

Por cálculo direto obtém-se

$$\begin{aligned} L(\theta, z, 0) &= \frac{ab(b^2 - a^2)sen(\theta)cos(\theta)z}{1 - z^2}, \\ M(\theta, z, 0) &= ab(1 - b^2)(1 - ksen^2(\theta)) - z^2(1 - k + ksen^2(\theta)), \\ N(\theta, z, 0) &= ab(b^2 - a^2)(1 - z^2)zsen(\theta)cos(\theta), \\ k &= \frac{a^2 - b^2}{1 - b^2}. \end{aligned}$$

Como o objetivo é verificar a hiperbolicidade do ciclo principal,  $c_\epsilon$ , considere o mapa de Poincaré  $\Pi(z, \epsilon) = z(2\pi, z, \epsilon)$ , onde  $z(\theta, z, \epsilon)$  é solução de (3.57) com condição inicial  $z(0, z, \epsilon) = z$  e mostraremos que  $\frac{\partial^2 \Pi}{\partial z \partial \epsilon} \neq 0$  para  $k$  pequeno.

A primeira derivada do mapa de Poincaré é

$$\frac{\partial \Pi}{\partial z}(0, \epsilon) = exp \left[ - \int_0^{2\pi} \frac{N_z(\theta, 0, \epsilon)}{M(\theta, 0, \epsilon)} d\theta \right]. \quad (3.58)$$

Fazendo a derivada de (3.58) em relação a  $\epsilon$  obtemos

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial z \partial \epsilon}(0, \epsilon) = - \int_0^{2\pi} \frac{N_{zz}(\theta, 0, \epsilon)M(\theta, 0, \epsilon) - N_z(\theta, 0, \epsilon)M(\theta, 0, \epsilon)}{M(\theta, 0, \epsilon)^2} d\theta. \quad (3.59)$$

Fazendo as contas segue que

$$\begin{aligned}
E(\theta, 0, \epsilon) &= (1+R)^2(a^2 \operatorname{sen}^2(\theta) + b^2 \cos^2(\theta)) + \frac{\epsilon(a^2 - b^2) \operatorname{sen}(2\theta) h'(\theta) (1+R)^{d+1}}{\Omega} \\
&\quad + \frac{\epsilon^2(a^2 \cos^2(\theta) + b^2 \operatorname{sen}^2(\theta)) (1+R)^{2d} (h'(\theta))^2}{\Omega^2}, \\
F(\theta, 0, \epsilon) &= 0, \\
G(\theta, 0, \epsilon) &= 1, \\
e(\theta, 0, \epsilon) &= 0, \\
f(\theta, 0, \epsilon) &= 0, \\
f_z(\theta, 0, \epsilon) &= \frac{-2ab h'(\theta) (1+R)^d \epsilon \left[ \frac{-2(1+R)}{\Omega+d-1} + \frac{\epsilon d(d-1) h(\theta) (1+R)^{d-1}}{\Omega} \right]}{\Omega^2}, \\
F_\epsilon(\theta, 0, \epsilon) &= \frac{-2}{\Omega(1+R)(b^2 - a^2) \operatorname{sen}(\theta) \cos(\theta)} - \frac{\epsilon^2(a^2 \cos^2(\theta) + b^2 \operatorname{sen}^2(\theta)) (1+R)^d h'(\theta)}{\Omega}, \\
e_\epsilon(\theta, 0, 0) &= ab \left( h - \frac{h''(\theta)}{2} \right), \\
E_\epsilon(\theta, 0, 0) &= -h(a^2 \cos^2(\theta) + b^2 \operatorname{sen}^2(\theta)) - (b^2 - a^2) \operatorname{sen}(\theta) \cos(\theta) h'(\theta), \\
g_\epsilon(\theta, 0, 0) &= -\frac{abd h(\theta)}{2}.
\end{aligned} \tag{3.60}$$

onde  $\Omega = 2(1+R) + \epsilon d h(1+R)^{d-1}$ . Substituindo as expressões acima em (3.59) segue que

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial z \partial d \epsilon}(0, \epsilon) = - \int_0^{2\pi} \frac{A}{2(1-b^2)(1-k \operatorname{sen}^2(\theta))} d\theta, \tag{3.61}$$

onde

$$\begin{aligned}
A &= k \operatorname{sen}(\theta) \cos(\theta) [2 - (d+2)(1-k(1-b^2)) \cos(2\theta)] h(\theta) \\
&\quad + \{b^2(d-1) + k[-b^2(d-1) \operatorname{sen}^2(\theta) + (1-b^2)(d-2) \operatorname{sen}^2(\theta) + (1-b^2) \cos^2(\theta)]\} h'(\theta) \\
&\quad + k \operatorname{sen}(\theta) \cos(\theta) [(1-b^2)(1-k \operatorname{sen}^2(\theta)) - 1] h''(\theta).
\end{aligned}$$

Desenvolvendo  $A$  em série de Taylor segue que

$$\begin{aligned}
A &= b^2(d-1) h'(\theta) \\
&\quad + \left\{ -dh'(\theta) \operatorname{sen}(\theta) \cos(\theta) - b^2 h''(\theta) \operatorname{sen}(\theta) \cos(\theta) + [(1+b) + (2b+d-3) \operatorname{sen}(\theta)] h'(\theta) \right\} k \\
&\quad + O(k^2).
\end{aligned} \tag{3.62}$$

Substituindo (3.62) em (3.61) e resolvendo a integral por partes segue que

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial z \partial d \epsilon}(0, \epsilon) = k(c_0 + c_1 k + \dots)$$

onde,

$$c_0 = 3[(d-2)/2] \int_0^{2\pi} h(\theta) \sin(2\theta) d\theta. \quad (3.63)$$

Substituindo a função  $h(\theta)$  o  $c_0$  é diferente de zero e para  $k$  não nulo a derivada do mapa de primeiro retorno de  $c_\epsilon$  é não nula. Portanto este ciclo é hiperbólico. ■

### 3.4 Teorema de Estabilidade Estrutural

De acordo com a definição 3.2, uma superfície algébrica  $A(\alpha)$  é chamada de estável se ao realizarmos uma pequena mudança no polinômio  $\alpha$ , chame o modificado de  $\beta$ , a superfície  $A(\beta)$  deve ter as mesmas propriedades de  $A(\alpha)$ : tipos de pontos umbílicos, linhas de curvatura e ciclos hiperbólicos. Quem faz isso é um homeomorfismo. Quando as propriedades são preservadas em todos os pontos de  $A(\alpha)$  a estabilidade é chamada de global, caso contrário local. A seguir, enunciamos o teorema de estabilidade global para superfícies algébricas orientáveis:

**Teorema 3.5.** *O conjunto  $\Sigma_n$  das superfícies algébricas de grau  $n > 2$  regulares e regulares no infinito que satisfazem simultaneamente as condições*

- a) Todos os pontos umbílicos são Darbouxianos e todos os finais de inflexão são bi-transversais.*
- b) Todos os ciclos principais são hiperbólicos e todas as curvas finais birregulares, isto é, os ciclos do infinito são semi-hiperbólicos.*
- c) Não existe conexão de separatrizes umbílicas e pontos finais de inflexão.*
- d) O conjunto limite de todas as linhas de curvatura são ciclos principais (finito ou infinito), um ponto umbílico ou um ponto final.*

*é aberto em  $\mathcal{A}_n$  e qualquer superfície deste conjunto é estruturalmente estável.*

*Demonstração.* Segue a demonstração do [4]. ■

Quando tratamos de superfícies compacta, ele coincide com o teorema 3.6 :

**Teorema 3.6.** *O conjunto  $\Sigma$  das superfícies implícitas compactas que satisfazem simultaneamente as condições*

- a) Todos os pontos umbílicos são Darbouxianos.*
- b) Todos os ciclos principais são hiperbólicos.*

c) Não existe conexão de separatrizes umbílicas.

d) O conjunto limite de todas as linhas de curvatura são ciclos principais.

é aberto e qualquer superfície deste conjunto é estruturalmente estável na topologia  $C^r$ .

*Demonstração.* Demonstração encontra-se em [4] e [10]. ■

De acordo com [1], para  $n = 2$  as superfícies estáveis são caracterizadas, após o teorema de Dupin, pelo elipsoide e hiperboloide de duas folhas com eixos diferentes e pelo hiperbolóide de uma folha (sem condições nos eixos).

A principal contribuição do artigo de Sotomayor e Garcia [1], foi considerar superfícies algébricas não compactas e em analogia ao resultado feito em [4] por Gutierrez e Sotomayor definir as condições  $a)$ ,  $b)$ ,  $c)$ , e  $d)$  para que tais superfícies sejam estruturalmente estáveis, a demonstração segue pelo mesmo método de 3.6.

### 3.5 Considerações finais

Baseado no artigo [1], neste trabalho analisamos o comportamento das linhas de curvatura numa vizinhança dos fins de uma superfície algébrica, encontrando condições de estabilidade estrutural das configurações principais no infinito por meio da compactificação de tais superfícies, veja proposição 3.3 e teorema 3.5. As condições de estabilidade estrutural para superfícies compactas foram dadas por Gutierrez e Sotomayor em [10].

Para melhor compreensão do artigo, que esta dissertação se baseia, definimos no capítulo 2 a compactação de curvas e superfícies algébricas exemplificando cada definição e resultado obtido. No capítulo 1, tomando como base [6] e [2], [12] e [16] colocamos os principais conceitos necessários para leitura da dissertação.

No capítulo 3 trazemos os resultados do artigo [1]. Nele, nosso objetivo foi entender as proposições, os teoremas e relacioná-los com o teorema de estabilidade estrutural enunciado no final do artigo. Percebemos que o uso da carta local na vizinhança do infinito caracterizou o comportamento próximo aos pontos finais e, além disso, como consequência dessa caracterização (ver proposição 3.3) o trabalho [10] define o homeomorfismo que faz a correspondência dos pontos umbílicos e linhas de curvatura (teorema 3.1). Nas demais seções; 3.2 e 3.3, compreendemos os resultados do artigo [1], que demonstram como aparecem os pontos umbílicos e ciclos limites no infinito.

# Capítulo 4

## Resultados

Esse apêndice relembra resultados usados no capítulo 2.

### 4.1 Lema de Morse

Esta seção, contém o lema de morse e a definição de ponto crítico não degenerado.

**Definição 4.1.** Um ponto crítico  $a$ , ou seja que satisfaz  $\nabla f(a) = 0$ , de  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ , é ponto não degenerado de Morse se o determinante da matriz hessiana de  $f$ ,

$$Hess f(a) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f(a)}{\partial x \partial x} & \frac{\partial^2 f(a)}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f(a)}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2 f(a)}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f(a)}{\partial y \partial y} & \frac{\partial^2 f(a)}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2 f(a)}{\partial z \partial x} & \frac{\partial^2 f(a)}{\partial z \partial y} & \frac{\partial^2 f(a)}{\partial z \partial z} \end{bmatrix},$$

é diferente de zero.

**Lema 4.1.** Seja  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  uma função diferenciável e  $x \in \mathbb{R}^n$  um ponto crítico não degenerado de Morse para  $f$ . Então existe um difeomorfismo  $\phi : V \rightarrow W$ , com  $0 \in V, x \in W$  e  $\phi(0) = x$  tal que

$$f(\phi(y)) = f(x) + \sum_{i,j=1}^n (f_{i,j}) y_i y_j$$

para todo  $y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in V$ , onde  $(f_{i,j}(x))$  denota a matriz hessiana de  $f$  no ponto  $x$ .

### 4.2 Resultante de Polinômios

O resumo da teoria de resultante que consta nessa seção está de acordo com [20].

**Definição 4.2.** Sejam  $K$  um corpo,  $A = K[X]$  o anel dos polinômios em uma indeterminada  $X$  com coeficientes em  $K$  e

$$\begin{aligned} f &= a_d Y^d + \dots + a_0, (d > 0) \\ g &= b_e Y^e + \dots + b_0, (e > 0) \end{aligned} \quad (4.1)$$

polinômios com coeficientes  $a_i, b_i$  em  $A = K[X]$ . Definimos a resultante de  $f$  e  $g$  por

$$R = R_{f,g} = \det \begin{pmatrix} a_d & a_{d-1} & \cdots & a_0 & & & & \\ & a_d & \cdots & a_1 & a_0 & & & \\ & & \cdots & \cdots & \cdots & & & \\ & & & & & a_d & \cdots & a_0 \\ b_e & b_{e-1} & \cdots & b_0 & & & & \\ & b_e & \cdots & b_1 & b_0 & & & \\ & & \cdots & \cdots & \cdots & & & \\ & & & & & b_e & \cdots & b_0 \end{pmatrix}$$

o determinante da matriz  $(d+e) \times (d+e)$ , com  $e$  linhas de  $a's$  e  $b's$ . Subtende-se que os espaços em branco são preenchidos com zeros.

Observe que na definição acima  $a_d$  e  $b_e$  podem ser nulos, caso sejam não nulos o grau de  $f$  e  $g$  são respectivamente  $d$  e  $e$ . No caso em que usaremos o resultante, os coeficientes  $a_i, b_j$  são polinômios em outras variáveis  $X_1, X_2, \dots, X_n$ . Escreve-se  $R(X_1, X_2, \dots, X_n)$  para enfatizar que  $R$  é um polinômio nessas variáveis.

**Exemplo 4.1.** Sejam

$$\begin{aligned} f(X, Y) &= Y^2 + X^2 - 4 \\ g(X, Y) &= XY - 1 \end{aligned} \quad (4.2)$$

então o resultante desses dois polinômios é

$$R_{f,g} = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & X^2 - 4 \\ X & -1 & 0 \\ 0 & X & -1 \end{pmatrix} = X^4 - 4X^2 + 1$$

O próximo exemplo exhibe a matriz com  $d = 5$  e  $e = 3$ .



**Exemplo 4.2.** Considere os polinômios

$$\begin{aligned} f &= a_5 Y^5 + a_4 Y^4 + a_3 Y^3 + a_2 Y^2 + a_1 Y + a_0, \\ g &= b_3 Y^3 + b_2 Y^2 + b_1 Y + b_0, \end{aligned} \tag{4.3}$$

Pela definição acima o resultante de  $f$  e  $g$  é

$$R = R_{f,g} = \det \begin{pmatrix} a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & 0 & 0 \\ 0 & a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & 0 \\ 0 & 0 & a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \\ b_3 & b_2 & b_1 & b_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_3 & b_2 & b_1 & b_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_3 & b_2 & b_1 & b_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_3 & b_2 & b_1 & b_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_3 & b_2 & b_1 & b_0 \end{pmatrix}$$

o determinante da matriz  $8 \times 8$ , com 3 linhas de  $a$ 's e 5 de  $b$ 's.

**Proposição 4.1.** Sejam

$$\begin{aligned} f &= a_d(X)Y^d + \dots + a_0(X) \\ g &= b_e(X)Y^e + \dots + b_0(X), \end{aligned} \tag{4.4}$$

onde  $a_i, b_j$  são polinômios nas variáveis  $X_1, X_2, \dots, X_n$ . Então para cada  $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$  tem-se

$$R_{f,g}(X) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a_d(X) = b_e(X) = 0 \\ \text{ou} \\ f(X,Y), g(X,Y) \text{ admitem fator comum não constante.} \end{cases}$$

*Demonstração.* Encontra-se em [20]. ■

Dessa proposição podemos afirmar que dadas duas superfícies algébricas, a saber

$$A(\alpha) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; \alpha(x, y, z) = 0\} \tag{4.5}$$

$$A(\beta) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; \beta(x, y, z) = 0\} \tag{4.6}$$

a superfície algébrica  $A(R_{\alpha,\beta}) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; R_{\alpha,\beta}(x, y, z) = 0\}$  contém o zeros comuns

de  $A(\alpha)$  e  $A(\beta)$ . No artigo o resultante foi usado para obter a interseção de duas superfícies algébricas.

# Referências Bibliográficas

- [1] SOTOMAYOR, J.;GARCIA, R. A. Lines of Curvature on Algebraic Surfaces. Bull Sci. Math. 1996, 120, p.367-395. [9](#), [10](#), [27](#), [28](#), [31](#), [33](#), [36](#), [42](#), [49](#), [60](#), [67](#), [76](#)
- [2] SOTOMAYOR, J.;GARCIA, R. A. Lines of principal curvature near singular end points of surfaces in  $\mathbb{R}^3$ . Advanced Studies in Pure Mathematics 43, 2006, p. 437–462. [9](#), [10](#), [76](#)
- [3] DO CARMO, M. P. Formas diferenciais e Aplicações.1ª edição, Rio de Janeiro,2015. [15](#), [19](#)
- [4] GUTIERREZ, C.;SOTOMAYOR, J. Structurally Stable Configurations of Lines of Curvature and Umbilic Points on Surfaces. Monografias del IMCA n° 3, Peru, 1998. [60](#), [66](#), [75](#), [76](#)
- [5] ILIASKENKO, YU. Finiteness theorems for limit cycles, Uspechi Mat. Nauk,143-200,Russian, 1990 [72](#)
- [6] GARCIA, R. A.; SOTOMAYOR, J. Differential Equations of Classical Geometry, a Qualitative Theory. 27º Colóquio Brasileiro de Matemática. IMPA, Rio de Janeiro, 2009. [11](#), [23](#), [66](#), [76](#)
- [7] GARCIA, R. A.; SOTOMAYOR, J. Lines of Principal Curvature near singular points on Implicit Surfaces, Bulletin de Sciences Mathematiques, 117, 1993. [61](#)
- [8] GUILFOYLE, b.; ORTIZ-RODRÍGUEZ, A. Umbilic Points on the Finite and Infinite Parts of Certain Algebraic Surfaces,https://arxiv.org/pdf/1808.05273.pdf, 2018. [10](#), [45](#)
- [9] CRUZ, D. H. Geometria Extrínseca de Superfícies Singulares de  $\mathbb{R}^3$ . Dissertação, UFG. Goiânia,2013. [72](#)
- [10] GUTIERREZ, C.; SOTOMAYOR, J. Structural Stable Configurations of Lines of Principal Curvature, Asterisque 98-99, 1982, 185-215. [9](#), [23](#), [50](#), [76](#)
- [11] DOS SANTOS, J. B. Distância entre curvas algébricas: uma discussão para o ensino médio. UNICAMP, Campinas. 2016. [31](#)

- [12] DO CARMO, M.P. Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies, Rio de Janeiro, SBM, 2012. [76](#)
- [13] TENENBLAT, Ket. Introdução a geometria diferencial, São Paulo, Editora Blucher, 2008.
- [14] GUTIERREZ, C.; SOTOMAYOR, J. An Approximation Theorem for Immersions with Structurally Stable Configurations of Lines of Principal Curvature, Lect. Notes in Math. 1007, 1983. [50](#)
- [15] GUTIERREZ, C.; SOTOMAYOR, J. Lines of Curvature and Umbilic Points on Surfaces, 18th Brazilian Math. Colloquium, Rio de Janeiro, IMPA, 1991. [50](#)
- [16] DO CARMO, M.P. Geometria Riemanniana, Rio de Janeiro, IMPA, 2015. [21](#), [76](#)
- [17] SOTOMAYOR, Jorge. Equações diferenciais ordinárias. São Paulo. Livraria da Física, volume 4, Coleção textos universitários do IME-USP, 2011. [26](#), [27](#)
- [18] PEIXOTO, M. C.; PEIXOTO, M. M. Structural stability in the plane with enlarged boundary conditions, An. Academia Brasileira de Ciencias, vol. 31, 1959. [9](#)
- [19] PEIXOTO, M. M. Structural stability on two-dimensional manifolds. Topology, 101-120, 1962. [9](#)
- [20] VAINSENCER, I. Introdução as curvas algébricas planas. Rio de Janeiro, IMPA, 2005. [77](#), [79](#)
- [21] SPINDOLA, F. L. N. Bifurcação de pontos axiumbólicos e ciclos axiais de superfície imersas de  $\mathbb{R}^4$ . Tese. IME-USP. São Paulo. 2015. [27](#)